INTRODUCCION AL CÁLCULO

LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. PREREQUISITOS:

Los temas necesarios para esta unidad son:

- Contenidos de la guía de la unidad 1.
- Reducción de términos semejantes.
- Factoreo.
- Simplificación de fracciones.
- Logarítmos y exponenciales
- Valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables
- Manejo del círculo trigonométrico
- Ecuaciones trigonométricas
- Fórmulas para volúmenes y áreas de sólidos elementales

2. MATERIAL DE APOYO :

- Libro de texto: STEWART, J.: "Cálculo de una variable", (Sexta edición). Cengage Learning. 2008.
- Software matemático (Winplot, Derive)
- Calculadora con CAS

3. ACTIVIDADES ESPECÍFICAS

- Una lectura compresiva de las definiciones, enunciados, y ejemplos desarrollados en clase.
- Elaboración grupal de las respuestas del cuestionario, justificación de cada etapa del desarrollo de ejercicios. Discusión grupal sobre procedimientos, resultados.
- Análisis crítico de los ejercicios desarrollados.

4. METODOLOGÍA DE TRABAJO

- El docente durante la clase definirá los conceptos necesarios para el desarrollo de la guía. Para lo cual es imprescindible que el estudiante analice la teoría con anterioridad para facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje.
- En clase los estudiantes organizan equipos de hasta 2 estudiantes (dependiendo del número de estudiantes por curso) para desarrollar las actividades de la guía propuesta
- El docente realiza el **control** de desarrollo de guías y califica en clase según la rúbrica de evaluación y si no termina el grupo de desarrollar completamente la guía, entonces entregará la parte faltante al final de la clase o en la siguiente sesión.

5. ACTIVIDADES PREVIAS (EXTRACLASE)

5.1 Factorizar los polinomios

a) $3x^2 + 12x - 15$

b) $x - 5x^4 - 7x^2 + 6x$

5.2 Simplifique las siguientes fracciones:

$$y + \frac{2y}{y-2} + \frac{4}{y^2-4}$$

5.3 Utilizando las leyes de los exponentes simplifica lo siguiente:

$$\frac{2^x 2^{(y-1)}}{2^{x+3}}$$

$$\frac{(7^x\, 7^y)^{2^x}}{7^{x+y}}$$

5.4 Resolver la siguiente ecuación:

$$(2^{x+1})(8^{2x-3}) = 64$$

5.5 Aplicar logaritmos y sus propiedades a la siguiente expresión:

$$\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$$

5.6 Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(x+1) - \log(x+2) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

5.7 Calcular los valores de las siguientes expresiones utilizando el círculo trigonométrico sin usar calculadora

4 Sec 30° - 5 Cos 45° =

5.8 Reducir las siguientes funciones trigonométricas a otras equivalentes de ángulos positivos menores a 90° sin usar calculadora.

Cot (210°)/ Sec (315°)

5.9 Determine el conjunto solución de la siguiente ecuaciones de tal forma que $0 \leq x \leq 2\pi$

$$2cos^2(x) \quad + 3\,\mathrm{sen}(x) = 0$$

6. REVISIÓN DE LOS CONCEPTOS DESARROLLADOS EN LA CLASE

6.1 ALGUNOS CUESTIONAMIENTOS PREVIOS

- ¿Recuerda cómo se resuelven las ecuaciones de primer y segundo grado?
- ¿Sabe reducir fracciones algebraicas?
- ¿Sabe factorizar?
- ¿Recuerda nociones sobre conjuntos?
- ¿Recuerda cómo graficar ecuaciones de primer grado y segundo grado?

6.2 INECUACIONES DE UNA VARIABLE

Una inecuación es cualquier expresión en la que se utilice alguno de los siguientes símbolos:
$<$ (menor que), $>$ (mayor que), $\leq$ (menor o igual que), $\geq$ (mayor o igual que) y aparezca una variable.

Ejemplo 1

a) $x < 56$ (x es menor que 56)
b) $x > \pi$ (x es mayor que pi)
c) $x \leq 5$ (x es menor o igual que 5)

6.2.1 Intervalos

Definición 1:

Sean a y b números reales tales que a es menor que b ($a < b$). Se llama intervalo abierto de extremos a y b, al conjunto cuyos elementos son los números reales x que cumplen la condición de que:

$$\boldsymbol{a < x \text{ y } x < b}$$

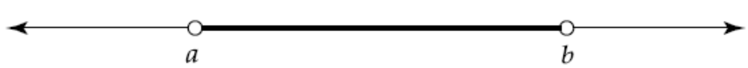
Notación:

a) El intervalo abierto de extremos a y b lo denotaremos por ($a; b$)
b) Si $a < x$ y $x < b$ escribimos $a < x < b$

De esta manera se tiene que:

$$(a,b) = \{x \in R / a < x < b\}$$

El intervalo abierto de extremos a y b lo representamos geométricamente de la manera siguiente:



Definición 2:

Sean a y b números reales tales que $a < b$. Se llama intervalo cerrado de extremos a y b, al conjunto cuyos elementos son los números reales x que cumplen la condición:

$$a \leq x \quad y \quad x \leq b$$

Notación:

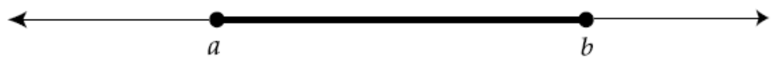
a) El intervalo cerrado de extremos *a* y *b* lo denotaremos por [*a; b*]
b) Si $a \leq x \quad y \quad x \leq b$ escribimos $a \leq x \leq b$

De esta manera se tiene que:

$$[a,b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$$

Se lee: x pertenece a los números Reales, tal que a sea menor o igual que x y x menor o igual que b)

El intervalo cerrado de extremos *a* y *b* lo representamos geométricamente de la manera siguiente:



Definición 3:

Sean *a* y *b* números reales tales que *a* < *b.* Se llama intervalo semi-abierto de extremos *a* y *b*, "abierto" en *a* y "cerrado" en *b*, al conjunto cuyos elementos son los números reales *x* que cumplen la condición:

$$a < x \quad y \quad x \leq b$$

Notación:

a) El intervalo semi-abierto de extremos *a* y *b* lo denotaremos por (*a; b*]
b) Si $a < x \quad y \quad x \leq b$ escribimos $a < x \leq b$

De esta manera se tiene que:

$$(a,b] = \{x \in R / a < x \leq b\}$$

El intervalo semi-abierto de extremos *a* y *b* lo representamos geométricamente de la manera siguiente:

En forma similar se define el intervalo "semi-abierto" de extremos *a* y *b*, "cerrado" en *a* y "abierto" en *b*, y se denota [*a; b*) de la manera siguiente:

$$[a,b) = \{x \in R / a \leq x < b\}$$

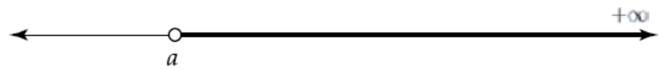
Geométricamente este intervalo se representa de la manera siguiente:

Definición 4:

a) Sea *a* un número real. El conjunto cuyos elementos son los números reales *x* tales que *x >a;* lo denotaremos en forma de intervalo por (a, ∞), es decir:

$$(a,\infty) = \{x \in R / x > a\}$$

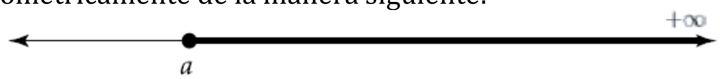
Y lo representamos geométricamente de la manera siguiente:



b) Sea a un número real. El conjunto cuyos elementos son los números reales x tales que $x \geq a$ lo denotaremos por [a,α), es decir:

$$[a,\infty) = \{x \in R / x \geq a\}$$

Y lo representamos geométricamente de la manera siguiente:



c) Sea a un número real. El conjunto cuyos elementos son los números reales x tales que $x < a;$ lo denotaremos por (-α, a), es decir:

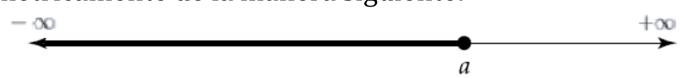
$$(-\infty, a) = \{x \in R / x < a\}$$

Y lo representamos geométricamente de la manera siguiente:

d) Sea a un número real. El conjunto cuyos elementos son los números reales x tales que $x \leq a$ lo denotaremos por (-α, a], es decir:

$$(-\infty, a] = \{x \in R / x \leq a\}$$

Y lo representamos geométricamente de la manera siguiente:

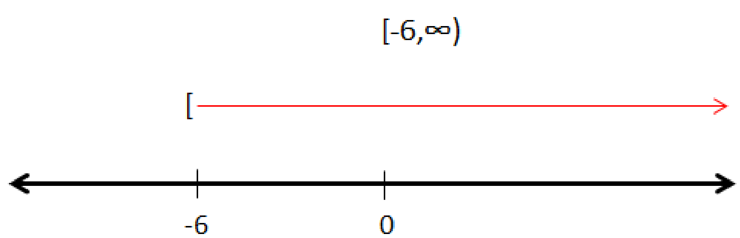


6.2.2 Inecuaciones con una variable

LINEALES	SEGUNDO GRADO	VALOR ABSOLUTO
$-3x-5 \leq 13$	$2x^2 - 9x + 7 < 0$	$\left\lvert \dfrac{7-3x}{2} \right\rvert \leq 1$

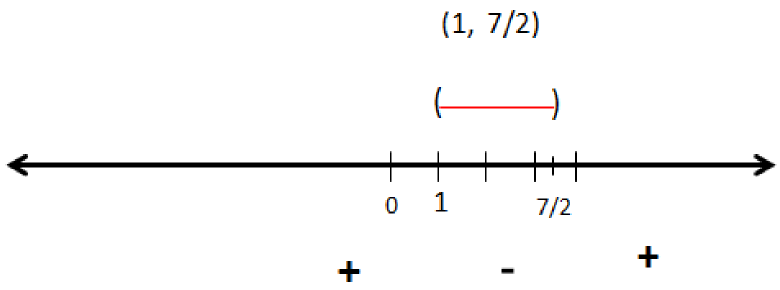
Ejemplo 2

$$-3x-5 \leq 13$$
$$3x+5 \geq -13$$
$$3x+5-5 \geq -13-5$$
$$3x \geq -18$$
$$x \geq -6$$



Ejemplo 3

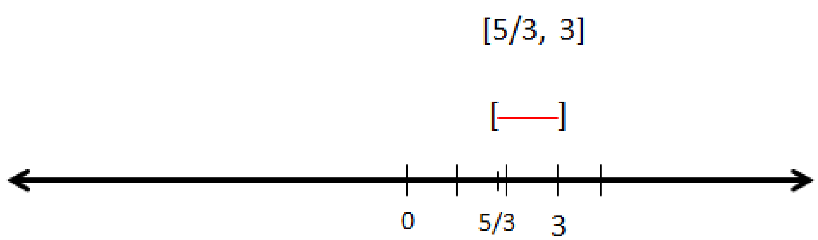
$$2x^2 - 9x + 7 < 0$$
$$factorizando:$$
$$(2x-7)(x-1) < 0$$
$$raíces:$$
$$x_1 = \frac{7}{2}$$
$$x_2 = 1$$



Ejemplo 4

$$\left|\frac{7-3x}{2}\right| \leq 1$$
$$-1 \leq \frac{7-3x}{2} \leq 1$$
$$-1.2 \leq \left(\frac{7-3x}{2}\right)(2) \leq 1.2$$
$$-2 \leq 7-3x \leq 2$$

$$-2-7 \leq 7-3x-7 \leq 2-7$$
$$-9 \leq -3x- \leq -5$$
$$9 \geq 3x \geq 5$$
$$9\left(\frac{1}{3}\right) \geq (3x)\left(\frac{1}{3}\right) \geq 5\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$3 \geq x \geq \frac{5}{3}$$



6.3 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN, DOMINIO Y RANGO

Una **función** ***f*** es una regla que asigna a cada elemento "**x**" de un conjunto **D** exactamente un elemento "**y**" de un conjunto **R**. El elemento **y** se llama la imagen de **x** bajo ***f*** y se denota por ***f(x).*** El conjunto **D** se llama el **dominio** de la función. El **rango** de la función consta de todas las imágenes de los elementos del dominio.

Se puede usar el diagrama de una máquina (Fig.1) para una función f, con el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el rango como el conjunto de todas las salidas posibles.

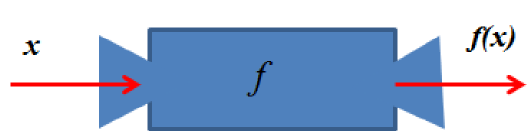


Fig. 1

Una función es un conjunto de pares ordenados (x,y) tales que no hay dos pares ordenados diferentes del conjunto que tienen el mismo primer elemento.

Notacion : ***y=f(x)*** significa y es función de x.

- **Variables:** Puesto que el valor de la variable “y” siempre depende de la elección de la variable “x”, entonces “y” es la variable dependiente y “x” se llama la variable independiente.
- **Dominio :** es el conjunto de valores posibles de la variable independiente que dan resultados reales
- **Rango :** el conjunto de resultados reales de la variable dependiente
- **Prueba de la Recta Vertical :** Una curva en el plano cartesiano representa una función, si cualquier recta vertical interseca la gráfica, como máximo, en un punto

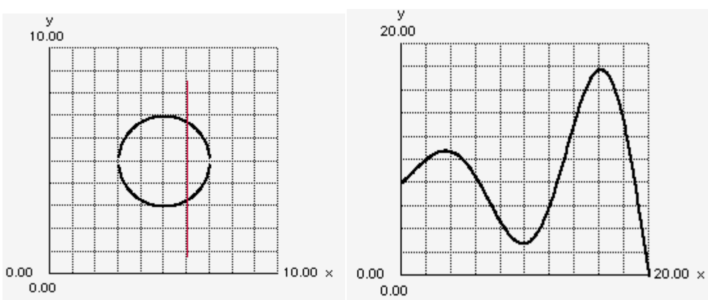
Ejemplo 5 : $\boldsymbol{y = \sqrt{x-4}}$

Variable independiente “x”, por lo tanto el dominio será condicionado por $x - 4 \geq 0$, $x \geq 4$

Significa los valores posibles de variable independiente son mayores o igual a 4

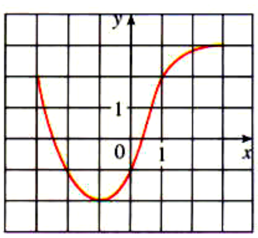
El rango corresponde a los valores de variable dependiente mayor o igual a cero.

Ejemplo 6 : Aplicar la prueba de la recta vertical



En este caso no representa función Si representa una función

Ejemplo 7 Se da la gráfica de una función f, establezca el dominio y el rango de f.

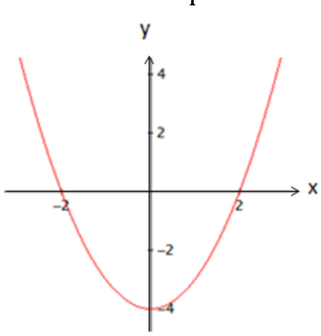


De acuerdo a la gráfica:

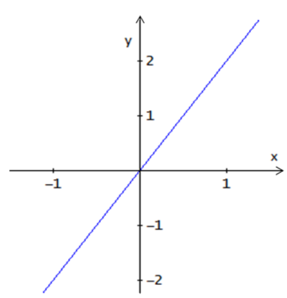
Dominio: [-3,3]

Rango: [-2,3]

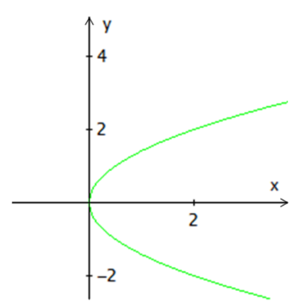
Ejemplo 8 Indique cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función de ”x”, además fundamente su respuesta.



a)



b)



c)

Las gráficas a) y b) si son funciones de “x” ya que cada elemento del dominio tiene una única imagen, podemos corroborar la información realizando la prueba de la recta vertical.

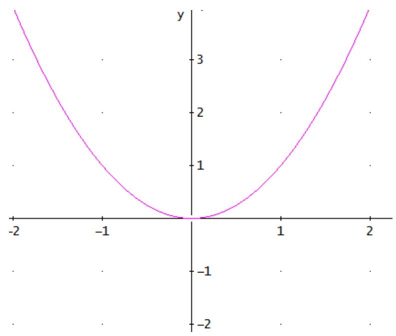
6.4 FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Una función se utiliza para describir problemas o fenómenos en campos de la ciencia. Para interpretar y usar datos obtenidos de tal función, es útil presentar los datos en forma gráfica
La gráfica de una función *f* es el conjunto de puntos (x,y) en el plano cuyas coordenadas satisfacen ***y=f(x)***

Función uno a uno (biunívoca): si y solo si cada elemento del rango de “f” está asociado con exactamente un elemento de su domino.

Ejemplo 9 Usando la definición de función uno a uno determine si la función $f(x)=x^2$ es una función uno a uno.

$$f(x)=x^2$$
$$f(x_1)\neq f(x_2)\quad siempre\quad que\quad x_1\neq x_2$$
$$x_1=1$$
$$x_2=-1$$
$$f(x_1)=1$$
$$f(x_2)=1$$

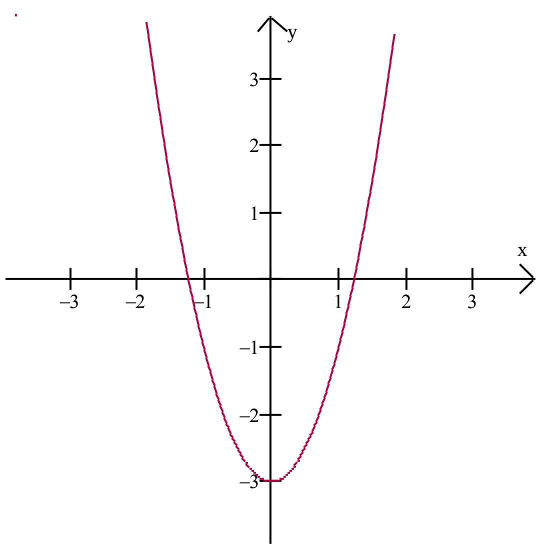


Por lo tanto la función no es uno a uno.

6.4.1 Función par

Si una función f satisface f(-x)=f(x), para todo número x en su dominio, entonces f se denomina función par, y es simétrica con respecto al eje y.

Ejemplo 10

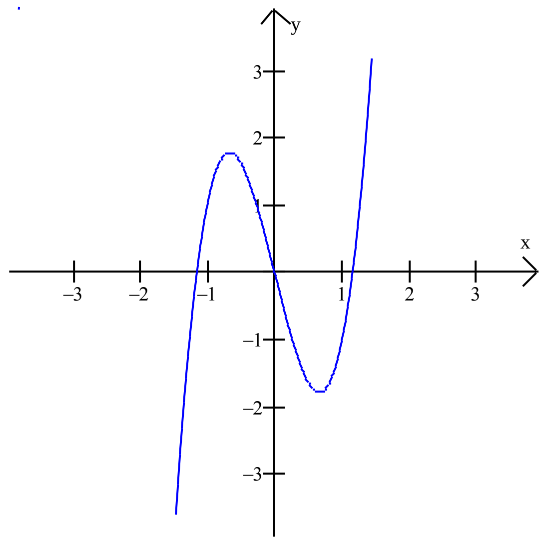


$$f(x)=2x^2-3$$
$$f(-x)=2(-x)^2-3$$
$$f(-x)=2x^2-3$$

Se observa en la gráfica que el eje de simetría corresponde al eje vertical "y"

6.4.2 Función impar Si una función f satisface f(-x)= -f(x), para todo número x en su dominio, entonces f se denomina función impar, y es simétrica con respecto al origen.

Ejemplo 11



$$f(x) = 3x^3 - 4x$$
$$f(-x) = 3(-x)^3 - 4(-x)$$
$$f(-x) = -3x^3 + 4x$$
$$f(-x) = -(3x^3 - 4x)$$

Se observa que la gráfica aparece en cuadrantes opuestos

Ejemplo 12 En la función $f(x) = \sqrt{x}$ evaluar un punto en la función, intersecciones, tabla de valores, gráfica.

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ *Dominio* $\quad x \geq 0$

$D : [0, \alpha)$

$R : [0, \alpha)$

Cortes:

$con\, el\, eje\ y \quad \rightarrow x = 0$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(0) = \sqrt{0}$

$f(x) = 0$

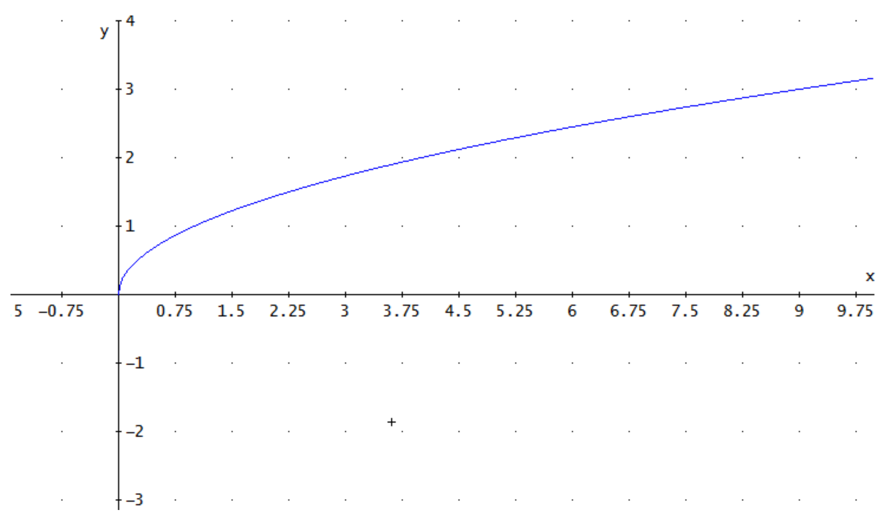
$(0,0)$

$con\, el\, eje\ x \quad \rightarrow y = 0$

$0 = \sqrt{x}$

$x = 0$

$(0,0)$

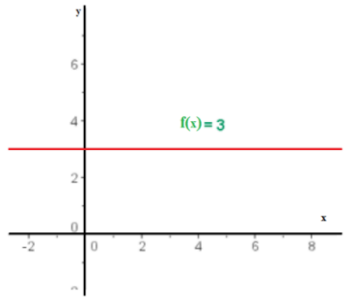


x	1	4	6	9
f (x)	1	2	$\sqrt{6}$	3

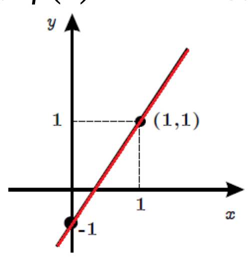
6.5 FUNCIONES BÁSICAS

6.5.1 Función constante: Es una recta horizontal que asigna a cada argumento la misma imagen c.

$$f(x) = c$$



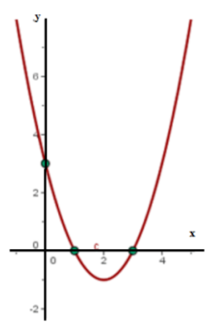
6.5.2 Función lineal : Tiene la forma: $f(x) = ax + b$. Su gráfica es una recta.



6.5.3 Funciones polinómicas: Tiene la forma:

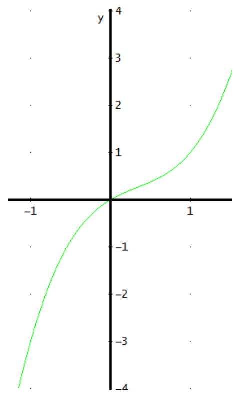
$$f : A \to B \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \;, \; a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$$

6.5.4 Función cuadrática: Son funciones polinómicas de segundo grado, siendo su gráfica una parábola. Su forma general es: $f(x) = ax^2 + bx + c$



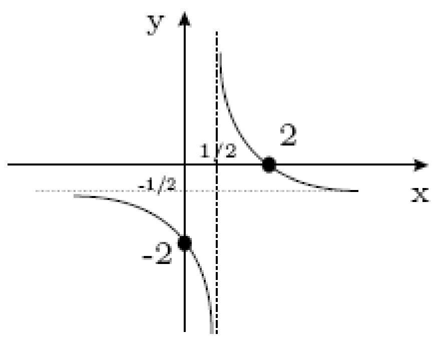
6.5.5 Función cúbica: Son funciones polinómicas de grado tres, tiene la forma general:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



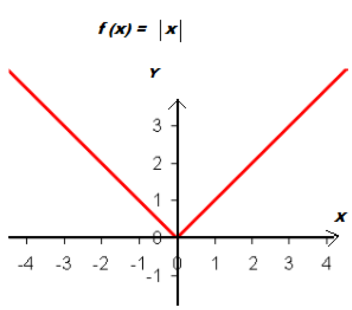
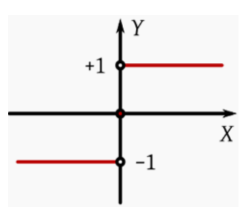
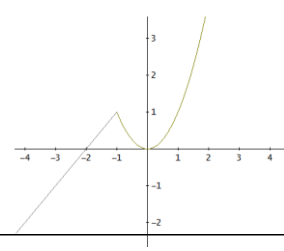
6.5.6 Funciones racionales: Una función racional f es la razón de dos polinomios. El dominio consiste de todos los valores de x tales que Q(x) ≠ 0

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$



6.5.7 Funciones algebraicas: Si una función puede construirse usando operaciones algebraicas se llama función algebraica.

6.5.8 Otras funciones:

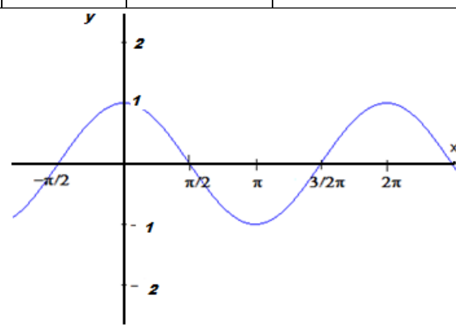
FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO	SIGNO	DEFINIDA POR PARTES
$f(x)=\lvert x\rvert=\begin{cases}x & si\ x\geq 0\\ -x & si\ x<0\end{cases}$ 	$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x>0\\ 0, & \text{si } x=0\\ -1, & \text{si } x<0\end{cases}$ 	$f(x)=\begin{cases}x+2 & si\ \ x\leq -1\\ x^2 & si\ \ x>-1\end{cases}$ 

6.6 FUNCIONES PERIODICAS: AMPLITUD, PERIODO, FRECUENCIA

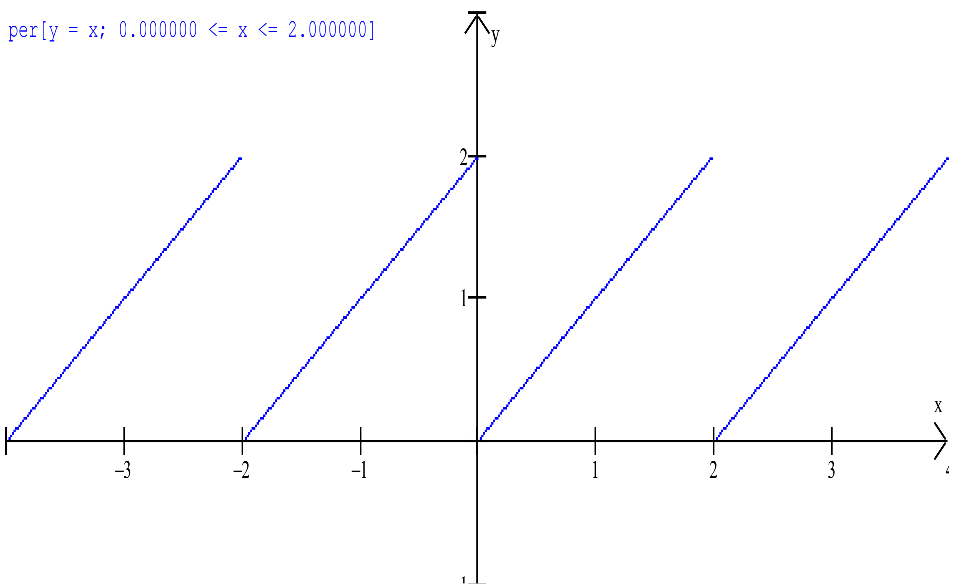
Una función f(x) es periódica si existe un número p tal que pueda hacer f(x + p) = f(x) para todas las x. Al menor número p se le llama período.

Ejemplo 13 : y = cos(x)

f(x)	Período	Amplitud	Rango	Dominio	Cortes con x
cos (x)	2π	1	[-1,1]	(-∞,∞)	(π/2+nπ) donde n pertenece a E



6.6.1 Funciones de cualquier período



x	y
0.00000	0.00000
1.00000	1.00000
2.00000	0.00000
3.00000	1.00000
4.00000	0.00000

Observando la gráfica y según la tabla de valores se puede verificar que la función se repite cada 2 , por lo tanto la función es periódica de período 2.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases} \qquad f(x+2) = f(x)$$

6.7 FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

"Un buen modelo matemático simplifica la realidad lo suficiente como para permitir cálculos matemáticos pero es lo suficientemente preciso para proveer conclusiones valiosas"
Un modelo matemático se puede elaborar usando fórmulas básicas de la geometría, física y otras ramas para lo cual será necesario identificar las variables, constantes y restricciones del problema planteado.

Ejemplo 14 Un depósito de agua tiene forma de cono circular recto, como se muestra en la figura 1. Si el radio y la altura del cono son 1 m y 3 m respectivamente, calcule el volumen de agua como función de r, donde r es el radio de la capa superior de agua.

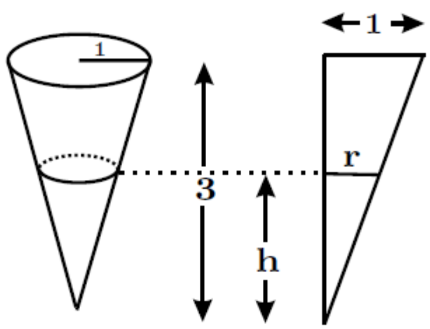


Fig.1

Para una altura ***h*** y un radio ***r*** en un cono, el volumen ocupado ***V*** de agua es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Si proyectamos el cono en un plano vertical, obtenemos triángulos semejantes, como se muestra en la figura 1. Utilizando las relaciones de semejanza entre los triángulos, concluimos que:

$$\frac{3}{h} = \frac{1}{r}$$

$$despejando\ h: \qquad h = 3r$$

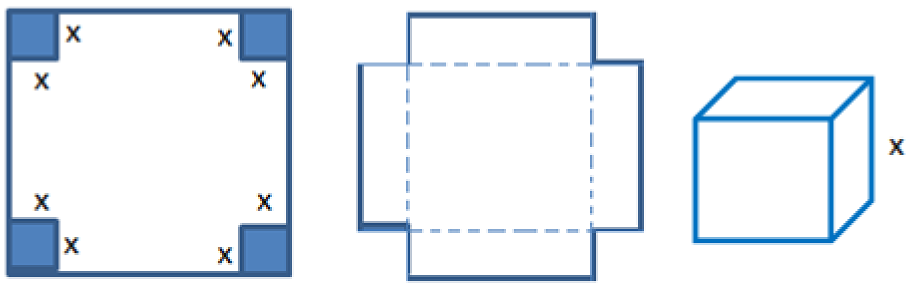
$$sustituyendo\,en: \ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 (3r)$$

$$V(r) = \pi r^3$$

El dominio de la función V (r) es *R*, aunque el dominio físico del problema es [0,α) debido a que un radio es una cantidad no negativa.

Ejemplo 15 Se dispone de una cartulina cuadrada de lado ***a***, y se quiere hacer una caja sin tapa recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando sus lados. Exprese el volumen de la caja en función de x.



Los lados de la cartulina cuadrada luego del corte de los cuadrados de igual tamaño me queda a-2x, y la altura de la caja va a tener de medida x, entonces:

$$V = l^3$$
$$V(x) = (a-2x)^2 x$$
$$V(x) = (a^2 - 4ax + 4x^2)(x)$$
$$V(x) = 4x^3 - 2ax^2 + a^2 x$$

6.8 COMBINACIÓN DE FUNCIONES

Se pueden formar nuevas funciones a partir de funciones dadas mediante adición, sustracción, multiplicación y división de sus valores. De acuerdo con esto, las nuevas funciones se conocen como la suma, diferencia, producto y cociente de las funciones originales.

Dadas las funciones *f y g:*

- **I.** Su suma, denotada por *f + g*, es la función definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- **II.** Su diferencia, denotada por *f – g*, es la función definida por $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- **III.** Su producto, denotado por *f*g*, es la función definida por $(f * g)(x) = f(x) * g(x)$
- **IV.** Su cociente, denotado por *f/g*, es la función definida por $(f/g)(x) = f(x)/g(x) \quad g(x) \neq 0$

En cada caso, el dominio de la función resultante consta de aquellos valores de x comunes a los dominios de *f y g*, con el requerimiento adicional en el caso **IV** de que se excluyan los valores de x para los cuales g(x)= 0

Ejemplo 16

Dado que *f y g* son las funciones definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x+1} \text{ y } g(x) = \sqrt{x-4}$$

Defina las siguientes funciones y determine el dominio de las funciones resultantes: (a) *f+g;* (b)*f-g;* (c)*f*g;* (d)=*f/g*.

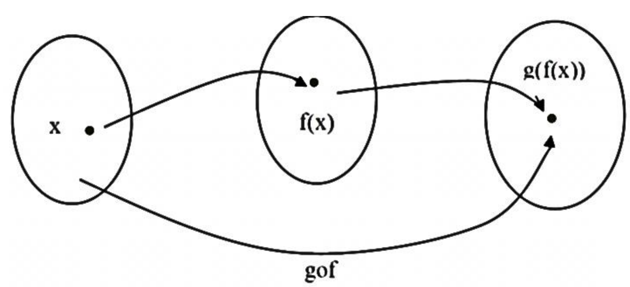
Solución:

(a) $(f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$
(b) $(f-g)(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$
(c) $(f*g)(x) = \sqrt{x+1} * \sqrt{x-4}$
(d) $(f/g)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}$

El dominio de f es [-1.∞) y el dominio de g es [4,∞). Así, el dominio de las funciones resultantes en los incisos (a), (b) y (c) es [4,∞). En el inciso (d), el denominador es cero cuando x=4; por lo que 4 también se excluye y se obtiene como dominio (4,∞)

6.9 FUNCIÓN COMPUESTA

Esta definición indica que cuando se calcula *(g o f)(x),* primero se aplica f a x y después se aplica g a *f(x).* Para visualizar este cálculo verifique el gráfico. La función f asigna el valor de *f(x)* al número x del dominio de *f.* la función g asigna el valor *g(f(x))* al número *f(x)* del dominio de *g.* observe que en la figura el contradonimio de f es un subconjunto del dominio de g y que el contradominio de $g\ o\ f$ es un subconjunto del contradominio de *g.*



Dadas las funciones *g y f,* la función compuesta, denotada por *g o f,* está definida por:

$$(g\ o\ f)(x) = g(f(x))$$

Y el dominio de $g\ o\ f$ es el conjunto de todos los números x del dominio de f tales que *f(x)* está en el dominio de *g.*

Ejemplo 17

Si f *y* g están definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ *y* $g(x) = 2x - 3$

Entonces: $(f\ o\ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x-3) = \sqrt{2x-3}$
El dominio de g es $(-\infty, +\infty)$ y el dominio de f es $[0, +\infty)$. Por tanto, el dominio de $f\ o\ g$ es el conjunto de números reales x para los cuales 2x – 3 ≥ 0 o, equivalente $[\frac{3}{2}, +\infty)$.

6.10 DESPLAZAMIENTOS VERTICALES Y HORIZONTALES

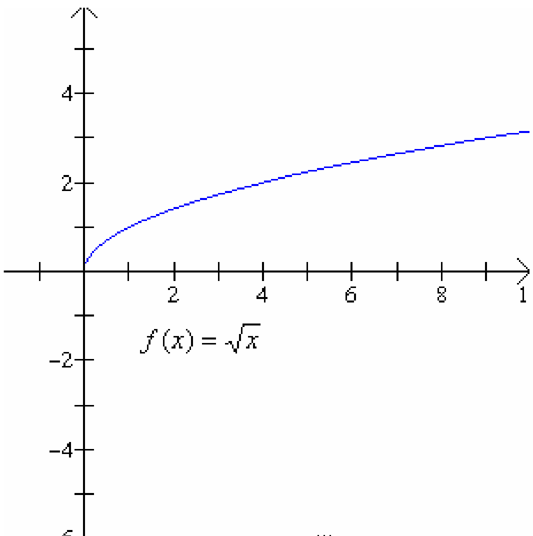
6.10.1 Traslación vertical

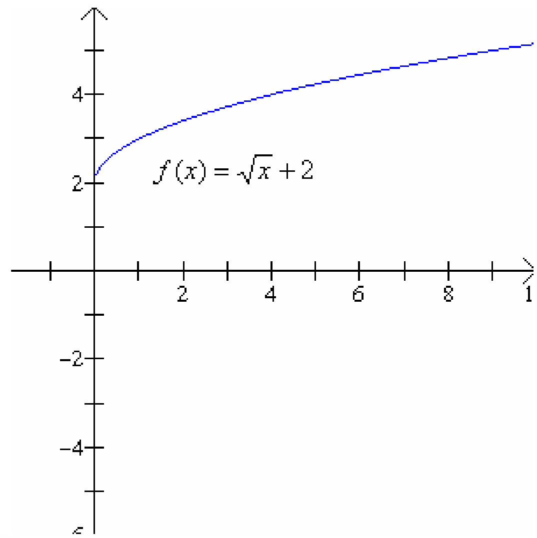
Si c > 0, entonces la gráfica de *f(x)+ c* es una traslación de *f,* c unidades hacia arriba.
Si c < 0, entonces la gráfica de *f(x)+c* es una traslación de *f,* c unidades hacia abajo.

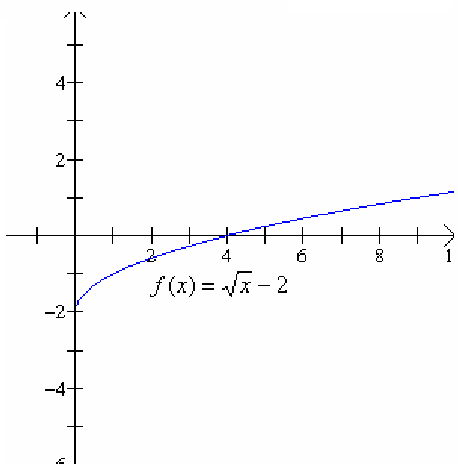
Ejemplo 18

Encontrar la gráfica de (a) $f(x) = \sqrt{x}$, (b) $f(x) = \sqrt{x} + 2$, (c) $f(x) = \sqrt{x} - 2$

Observar que los incisos (b) y (c) son una traslación vertical de la función $g(x) = \sqrt{x}$. Las gráficas se muestran a continuación.







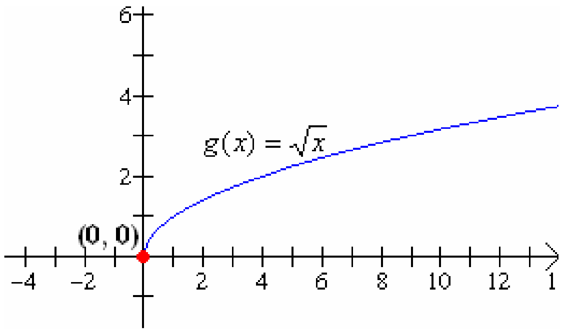
6.10.2 Traslaciones horizontales

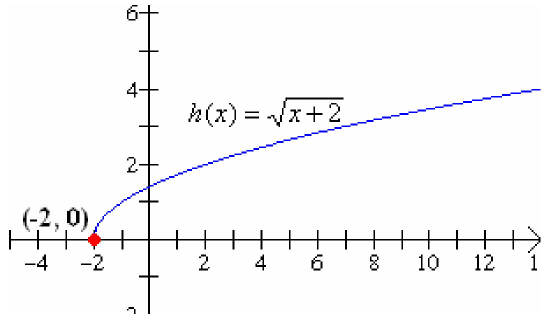
Si $c < 0$, entonces la gráfica de *f(x-c)* es una traslación de *f*, c unidades hacia la derecha.
Si $c < 0$, entonces la gráfica de *f(x-c)* es una traslación de *f*, c unidades hacia la izquierda.

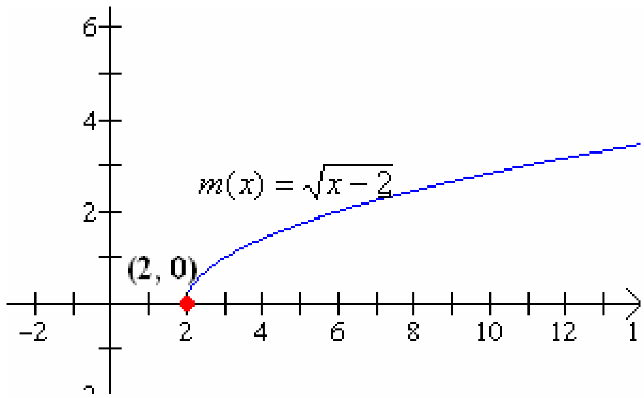
Ejemplo 19

Graficar las siguientes funciones (a) $g(x) = \sqrt{x}$, (b) $h(x) = \sqrt{x+2}$, (c) $m(x) = \sqrt{x-2}$

Observar que los incisos (b) y (c) son una traslación horizontal de la función $g(x) = \sqrt{x}$. Las gráficas se muestran a continuación.







6.10.3 Expansiones, contracciones verticales y reflexiones con los ejes

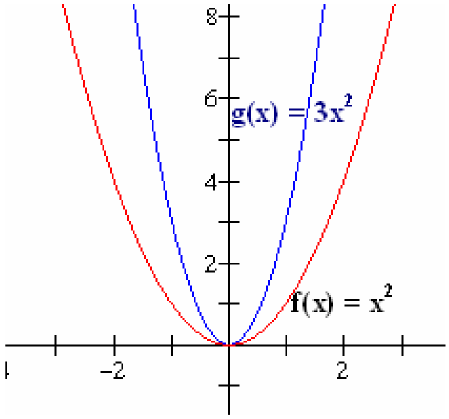
Si $c > 1$, entonces la gráfica de cf(x), es un alargamiento vertical de la gráfica de f por un factor de c unidades.
Si $0 < c < 1$, entonces la gráfica de cf(x), es una reducción vertical de la gráfica de f por un factor de c unidades.
Si $c < 0$, entonces cf(x) es una reflexión sobre el eje x de la función f.

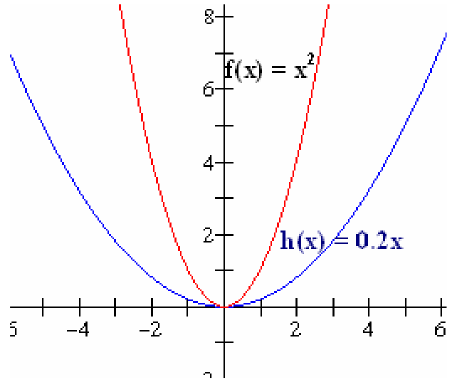
Ejemplo 20

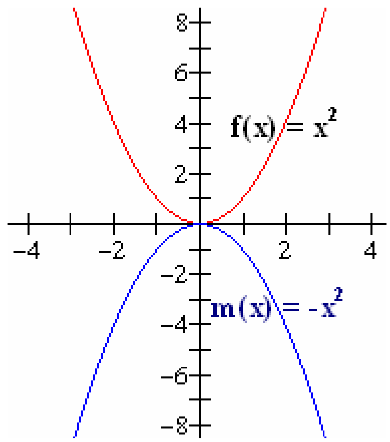
Graficar las siguientes funciones (a) $f(x)=x^2$, (b) $g(x)= 3x^2$, (c) $h(x)=0.2x$, (d) $m(x)=-x^2$.

Solución:

(a) La gráfica de f es una parábola que se abre hacia arriba y tiene su vértice en el eje x.
(b) La gráfica de g es un alargamiento vertical de la función de f por factor de 3.
(c) La gráfica de h es reducción vertical de f por factor de 0,5.
(d) La gráfica de m es una reflexión de f sobre el eje x.







6.11 FUNCIONES INVERSAS

6.11-1 Definición

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A y se define mediante

$$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$$

Para cualquier y en B.

6.11-2 Ecuaciones de cancelación

Una función y su función inversa se convierten en operaciones de cancelación al ser aplicadas de forma sucesiva.

Si tomamos un valor x del conjunto A y aplicamos la regla de asignación de f, esta imagen tomamos como entrada de forma inmediata aplicando la regla f^{-1}, llegamos al valor inicial x.

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

Si tomamos un valor x del conjunto B y aplicamos la regla de asignación de f^{-1}, esta imagen tomamos como entrada de forma inmediata aplicando la regla de f, llegamos al valor inicial x.

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Ejemplo 21

Si $f^{-1}(5) = 1$, f(3)=7 y f(8)=-10, Determine y justifique el resultado de:

$f^{-1}(7) = 3$	Porque	$f^{-1}\big(f(3)\big) = 3$
f(1)=5	porque	$f(f^{-1}(5)) = 5$
$f^{-1}(-10) =$		

6.11-3 Método para encontrar la función inversa

- Escriba y=f(x)
- Resuelva la ecuación para x en términos de y (de ser posible)
- Para expresar f^{-1} como una función de x, intercambie x y y la ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$

Ejemplo 22 Obtener la inversa de la función f(x) = -4x + 3, y graficar la función f y su inversa.

La función f es una función uno a uno y por lo tanto tiene inversa. Ahora escribimos a f como y = - 4x + 3, e intercambiamos las variables x e y para obtener x = - 4y + 3.
De esta última ecuación despejamos y para obtener la inversa $y = \frac{-x+3}{4}$ o bien $f^{-1} = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

6.11-4 Gráfica de la función inversa

El principio de intercambiar x y y da también el método para obtener la gráfica de f^{-1}. Puesto que f(a)=b si y sólo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a,b) se encuentra en la gráfica de f si y sólo si el punto (b,a) está sobre la gráfica de f^{-1}. Esto se obtiene al reflejar respecto a la línea y=x. (NOTA: tener precaución con las escalas seleccionadas para los ejes).

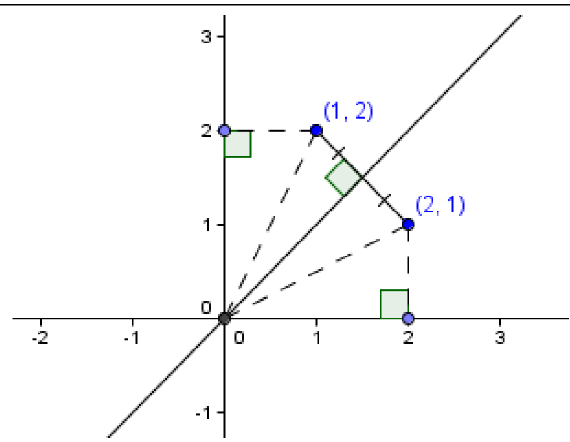


Figura 1

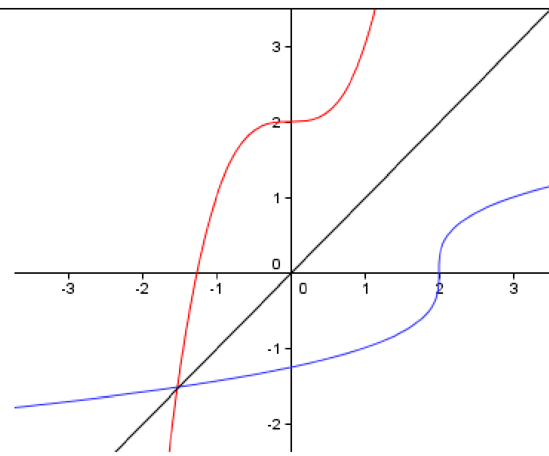


Figura 2

6.11-5 Funciones trigonométricas inversas

La función trigonométrica sen(x) no es uno a uno, pero se puede restringir al dominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ para que sí lo sea. Denotamos $\text{sen}^{-1}(x)$ o arcsen(x)

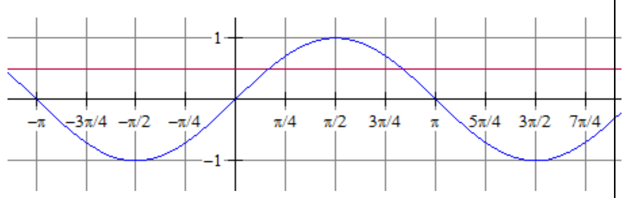


Figura 3

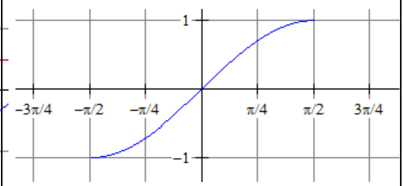


Figura 4

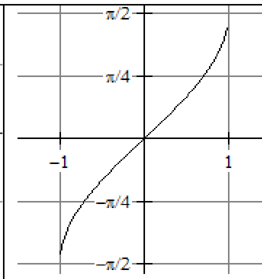


Figura 5

Las ecuaciones de cancelación correspondientes son

$$\sin^{-1}(\sin x) = x \qquad para -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$
$$\sin(\sin^{-1} x) = x \qquad para - 1 \leq x \leq 1$$

Ejemplo 23 Determine y justifique el valor de:

a) $\text{sen}^{-1}(1/2)$
b) tan (arcsen (1/3))

Las funciones restantes se tratan de forma similar lo cual se resume con lo siguiente.

$$\cos^{-1} x = y \quad \leftrightarrow \quad \cos y = x \quad y \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \qquad para\ 0 \leq x \leq \pi$$

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad para - 1 \leq x \leq 1$$

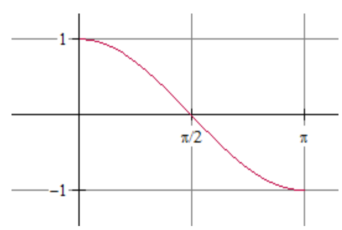


Figura 6

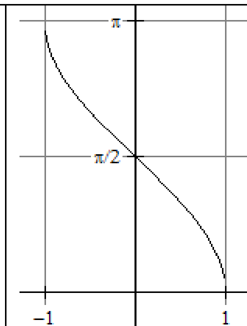


Figura 7

$$\tan^{-1} x = y \quad \leftrightarrow \quad \tan y = x \quad y \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

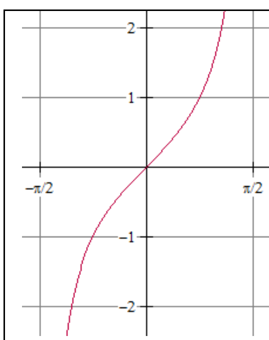


Figura 8

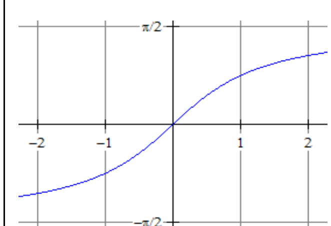


Figura 9

$$y = \csc^{-1} x \qquad (|x| \geq 1) \qquad \leftrightarrow \qquad \csc y = x \qquad y \qquad y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \quad U \ \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$y = \sec^{-1} x \qquad (|x| \geq 1) \qquad \leftrightarrow \qquad \sec y = x \qquad y \qquad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \quad U \ [\pi, \frac{3\pi}{2})$$

$$y = \cot^{-1} x \qquad (x \in R) \qquad \leftrightarrow \qquad \cot y = x \qquad y \qquad y \in (0, \pi)$$

ACTIVIDADES A DESARROLLAR

AC1 Represente en la recta numérica el valor de las desigualdades y explique qué significado tiene esta expresión.

a) $|x| < 5$

b) $|x - 5| \geq 4$

c) $|x + 3| \leq 2$

AC2 Resuelva las siguientes inecuaciones y represente con intervalos

a) $-1 < 2x - 5 < 7$

b) $x^2 - 2x - 35 < 0$ Resp: $-5 < x < 7$

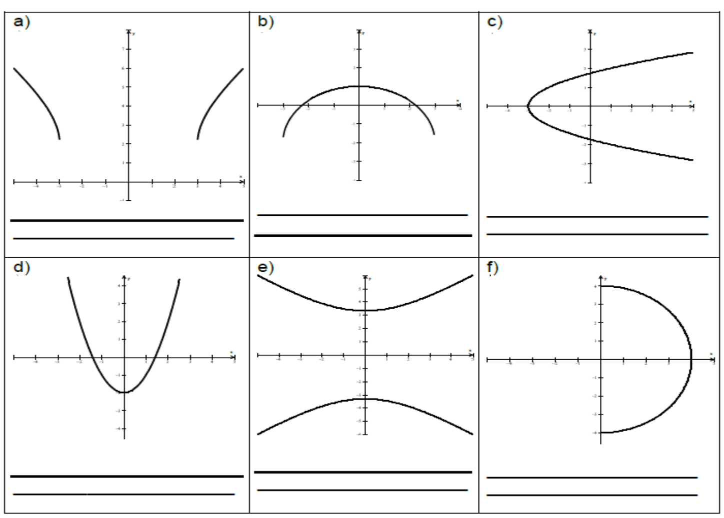
c) $|3x + 5| \leq 1$ Resp: $-2 \leq x \leq -\frac{4}{3}$

AC3 Dada la siguiente expresión, determinar los valores de la variable que garantizan que la expresión sea real

$$\sqrt{x^2 - 16}$$

AC4 La relación entre las escalas Celsius y Fahrenheit de temperatura está dada por C= (5/9(F-32), donde C es la temperatura en grados Celsius y F es la temperatura en grados Fahrenheir. ¿Qué intervalo en la escala Celsius corresponde a una rango de temperatura de $50 \leq F \leq 95$

AC5 ¿Cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función de "x" y cuáles no? Explique por qué.



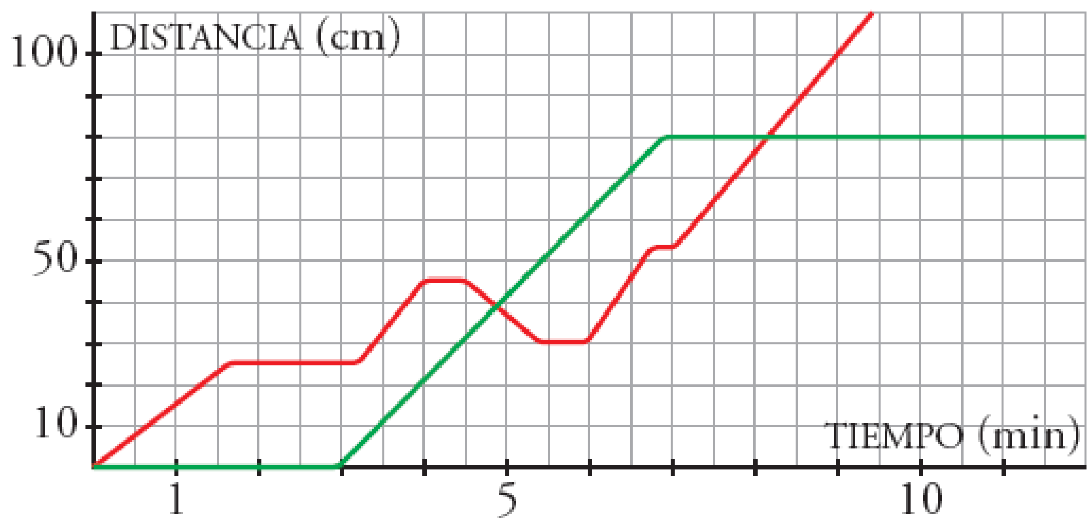
AC6 Rafael y María ponen a competir, en una carrera, a sus caracoles; uno de ellos lleva una tinta roja, y la otra tinta verde.

El verde tarda en salir y se para antes de llegar.

a) ¿Cuánto tiempo está parado en cada caso? ¿A qué distancia de la meta se para definitivamente?

b) ¿Cuántos centímetros y durante cuánto tiempo marcha el rojo en dirección contraria?

c) Describa la carrera.



AC7 Encuentre el dominio y el rango de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

b) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

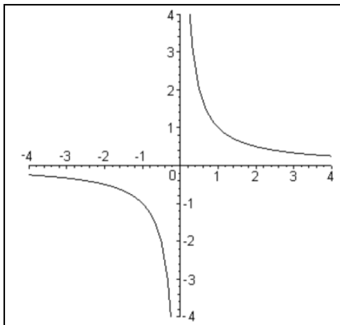
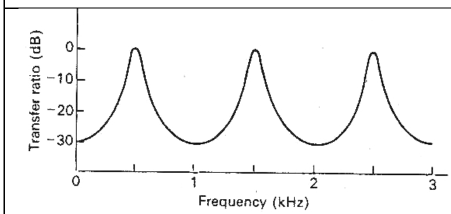
c) $f(x) = e^{\sqrt{x-2}}$

d) $f(t) = \ln(t^2\text{-}4)$

e) $F(t) = 2\cos(3t){-}1$

AC8 Indicar con una X si la función es biunívoca, justifique su respuesta

Función	biunívoca	Justificación
$y = x - 1$		
$y = 4x^2$		

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

AC9 Determine si la función es par, impar o ninguna de las dos, demuestre su respuesta.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

AC10 De las siguientes funciones, analice el dominio y grafique con escalas adecuadas.

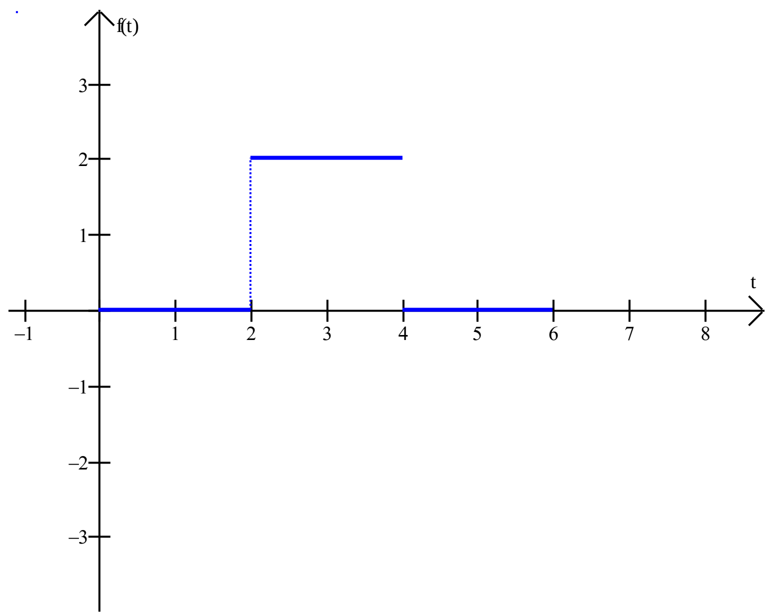
a) $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq 0 \\ x+1 & si\ 0 < x < 2 \\ x^2 - 1 & six \geq 2 \end{cases}$

b) $f(t) = u(t-2)$

c) $f(t) = sen\left(t - \frac{\pi}{2}\right) u(t - \frac{\pi}{2})$

b) $f(x) = Sgn(x+1) + Sgn(x-1)$

AC11 Representar el pulso mediante funciones escalón que dependen de la variable temporal.



AC12 Representar las siguientes funciones, estudiando su:

a) Dominio

b) Simetría

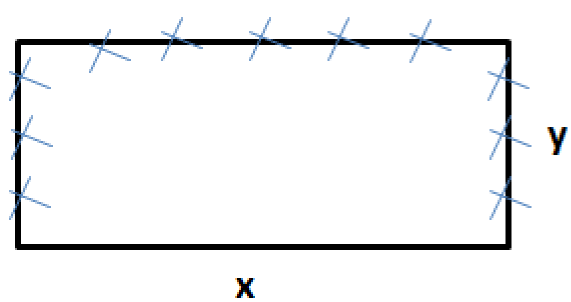
c) Puntos de corte con los ejes

d) Crecimiento y decrecimiento

e) Indique si la función es biunívoca

$$f(x) = -2sen(3x) + 1$$

AC13 Un lote rectangular va a cercarse en tres de sus lados, si el área del lote es de 30m², exprese la longitud de la cerca como una función de la longitud del lado no cercado.



Resp : $Lc(x) = x + \dfrac{60}{x}$

AC14 Defina la siguiente función y determine el dominio de la función resultante (a) f+g; (b) f-g; (c) f*g, (d) f/g; (d) g/f.

$$f(x) = x - 5 \, , \, g(x) = x^2 - 1$$

AC15 Sean $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = x + 3$. Encontrar las funciones compuestas (a) $(f \circ g)(x)$ y (b) $(g \circ f)(x)$ y sus dominios.

AC16 Trace las siguientes gráficas y especifique la función original.

$y = 4x^2$ y (b) $y = \frac{1}{4}x^2$

AC17 Trazar la gráfica de f para $f(x) = (x - 4)^2$ y para $f(x) = (x + 2)^2$. Especifique la función original y nombre el tipo de desplazamiento que realiza.

AC18 Dada la gráfica $y = \sqrt{x}$ use las transformaciones para graficar $y = \sqrt{x} - 2,\ y = \sqrt{x-2},\ y = -\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{-x}$.

AC19 Verifique que la siguientes funciones cumplen la relación $\boldsymbol{f(f^{-1}(x)) = x}$

$$f(x) = \frac{x}{4x+3}, \quad f^{-1}(x) = \frac{3x}{1-4x}$$

AC20 Dadas las siguientes funciones f y g, si $h(x) = f(g(x))$, determine la función inversa h^{-1}, indique su dominio y su rango y trace las gráficas de h y h^{-1} en un mismo sistema de ejes.

a) $f(x) = x^3, \quad g(x) = \frac{x+3}{2}$

AC21 Encuentre la inversa (si existe) de la función dada: $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$

AC22 Verificar si las funciones siguientes son inversas entre sí.

I. $f(x) = x - 2$ y $g(x) = x + 2$
II. $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$
III. $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$

AC23 Trace la gráfica de la función dada y determine su dominio y su rango

$$g(x) = -\cos^{-1}(x+2) - \pi$$

7. OBSERVACIONES ESPECIALES

- Revise los conceptos vistos en clase, que están relacionados con esta guía.
- Desarrollar todos los ejercicios propuestos en esta guía y los recomendados por el docente.
- Utilice software matemático para ayuda con las gráficas de algunos ejercicios.
- Ante cualquier duda, pregunte a su profesor.