GUÍA DE APRENDIZAJE

UNIDAD 1: ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Objetivos específicos :

- Comprender cómo las tasas de cambio pueden ser modelados usando la primera y segunda derivada
- Expresar y comprender la definición de ecuación diferencial.
- Clasificar las ecuaciones diferenciales
- Comprender el significado de solución de una ecuación diferencial dada
- Encontrar el intervalo de existencia de una solución
- Distinguir entre familia de soluciones y solución particular
- Reconocer cuando una ecuación diferencial de primer orden puede ser resuelta por separación de variables
- Resolver ecuaciones diferenciales lineales usando factores de integración
- Comprender el término de "ecuación exacta"
- Obtener la solución general de una ecuación exacta
- Comprender cómo los métodos de sustitución pueden ser usados para simplificar las ecuaciones diferenciales de primer orden
- Resolver problemas planteados desde física que puedan ser modelados por ecuaciones diferenciales de primer orden
- Interpretar las soluciones y gráficas en términos de un problema dado .
- Usar un paquete de software apropiado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

1. PREREQUISITOS

Los temas necesarios para esta unidad son :

- Dominio de funciones de una variable
- Conocimiento de reglas y métodos de derivación e integración básicos
- Derivada como una razón de cambio
- La primera derivada como pendiente de recta tangente
- Notaciones de la derivada
- Primera derivada y crecimiento/decrecimiento
- Manejo de diferenciales
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

2. MATERIAL DE APOYO

- AUTOR: ZILL DENNIS G,; CULLEN, MICHAEL R. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería , Mcgraw-Hill. México. 4ta. edición. 2012..
  Tabla de integrales y fórmulas extraída del texto
- Software matemático
- Calculadora con CAS

3. ACTIVIDADES ESPECÍFICAS

- Una lectura compresiva de las definiciones, enunciados, y ejemplos desarrollados en clase.
- Elaboración grupal de las respuestas de la guía, justificación de cada etapa del desarrollo de ejercicios. Discusión grupal sobre procedimientos, resultados.
- Elaboración de informe de trabajo integrador sobre problemas de aplicación en la Ingeniería
- Sustentación del trabajo integrador por grupos en la sesión de clases y análisis crítico de los resultados.

4. METODOLOGÍA DE TRABAJO

- El docente durante la clase definirá los conceptos necesarios para el desarrollo de la guía. Para lo cual es imprescindible que el estudiante analice la teoría con anterioridad para facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje.
- En clase los estudiantes organizan equipos (dependiendo del número de estudiantes por curso) para desarrollar las actividades de la guía propuesta
- El docente realiza el control de actividades y desarrollo de guía

5. ACTIVIDADES PREVIAS(extraclase)

Para reforzar los prerrequisitos resolver los siguientes problemas

5.1 Determinar las siguientes derivadas :

a) $\dfrac{d[\cos(3ln|x|)]}{dx}$

b) $\dfrac{dy}{dx} \rightarrow xy\ +\ xe^{y}\ +\ yLN|x| = 0$

c) $\dfrac{\partial F}{\partial y} \rightarrow F = x^2\cos(y) - \dfrac{3sen(x)}{xy}$

5.2 Familia de curvas

Obtenga la familia de curvas para los valores de k= −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3.
Siendo f(x)=x sen(x)+k, grafíquelas con algún software matemático en una ventana que contenga el dominio D:{x/ −3 π<x<3π}, y el rango R:{f(x)/ −4<f(x)<4}

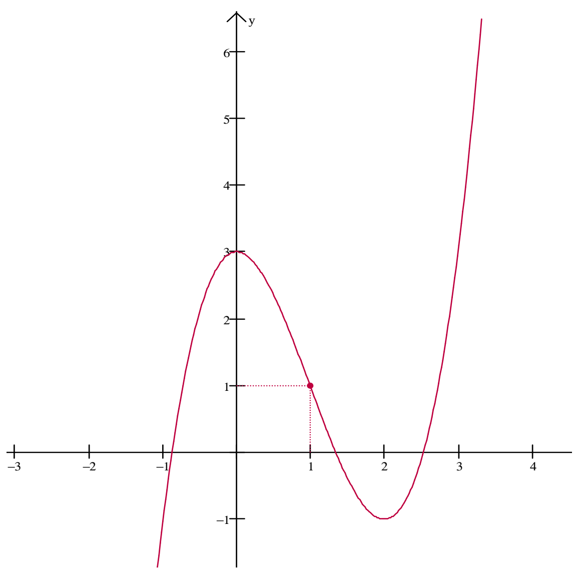
5.3 A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ determinar :

a) Los signos de la pendiente de la recta tangente en los puntos cuyas abcsisas son x=-1,0,1,2,3

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento

c) Los puntos máximos y mínimos

d) Verificar analíticamente



5.4 Un avión que vuela horizontalmente a una altitud de 1milla y a una rapidez de 500 $\frac{millas}{hra}$ pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez a la cual la distancia desde el avión a la estación se incrementa cuando está a 2 millas de la estación.

6. REVISIÓN DE CONCEPTOS

1.1 CONCEPTOS E IDEAS BÁSICAS

Para resolver un problema de ingeniería, es necesario elaborar una expresión matemática en términos de variables o funciones, es decir se obtiene un modelo matemático del problema dado. El proceso de estructurar el modelo, resolverlo e interpretar el resultado en términos del problema dado se conoce como modelado matemático.

El modelado requiere experiencia la cual se logrará mediante la discusión y análisis de varios ejemplos y problemas. La computadora puede a menudo ayudar en la solución pero rara vez en la creación de los modelos.

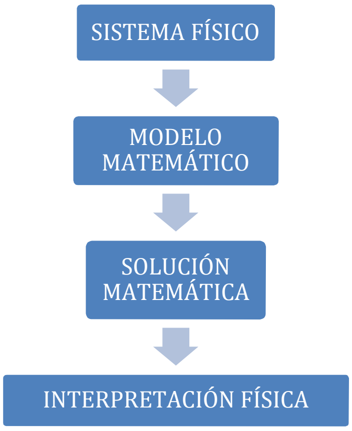


Fig 1. Modelación

Muchos conceptos físicos, tales como la velocidad y aceleración contienen derivadas por lo tanto un modelo es a menudo una ecuación que contiene derivadas de una función desconocida. Un modelo de este tipo se llama ecuación diferencial. Por supuesto, se quiere encontrar una solución (una función que satisface la ecuación), explorar sus propiedades, graficarla, hallar valores de la misma, e interpretarla en términos físicos de tal manera que se pueda entender el comportamiento físico en el problema dado. Sin embargo antes de recurrir a los métodos de solución, primero se debe definir algunos conceptos básicos necesarios.

Una ecuación diferencial ordinaria **(EDO)** es una ecuación que contiene una o más derivadas de una función desconocida, la cual se suele denominar y(x) (algunas veces y(t) si la variable independiente es el tiempo t). La ecuación también puede contener la misma variable dependiente, funciones conocidas de x (o t) , y constantes.

Ejemplo 1 EDOs ordinarias

Las ecuaciones diferenciales (1), (2) y (3) son ordinarias

(1) $$y' = sen(2x)$$

(2) $$y'' - 4y = e^{-3x}$$

(3) $$\frac{d^3y}{dt^3} - 5y = t^2$$

Ejemplo 2 Modelos de ecuaciones diferenciales

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg \qquad \textit{Caida Libre de los Cuerpos} \qquad (4)$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\,q = E(t) \quad \textit{Circuito Serie RLC} \qquad (5)$$

$$k\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \textit{Tranferencia de Calor} \quad (6)$$

Las ecuaciones diferenciales parciales **(EDP)** son aquellas que involucran derivadas parciales de una función desconocida d e2 o más variables. Por ejemplo :

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{dt}$$

Se dice que una ecuación diferencial es de **orden** n si la derivada enésima de la función desconocida es la mayor derivada que aparece en la ecuación. El concepto de orden da una clasificación útil dentro de las **EDOS** de primer orden, segundo orden, ect…Así la ecuación (1) es de primer orden, la (2) de segundo orden y (3) de tercer orden.

Una ecuación diferencial es lineal si la variable dependiente y sus derivadas solo aparecen en combinaciones aditivas de potencia uno , normalmente tienen el siguiente formato (8) :

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = G(x) \qquad (7)$$

donde $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x), G(x)$, dependen solo del variable independiente “x”.

Por ejemplo:

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} + \theta^3 = \theta\,sin(x), \;\; \textit{Es una EDO de } 4° \textit{ Orden y No Lineal}$$

$$\sqrt{4 - \left(\frac{d^2\emptyset}{dr^2}\right)^2} - 2\emptyset = 0, \quad \textit{Es una EDO de } 2° \textit{ Orden No Lineal}$$

En esta unidad se consideraran **EDOS** de primero orden. Tales ecuaciones solamente contienen la primera derivada y pueden contener la variable dependiente y algunas funciones de variable independiente. Por lo tanto se las puede escribir como

(8) $\qquad F(x, y, y') = 0 \qquad$ forma implícita

(9) $\qquad y' = f(x, y) \qquad$ forma explícita

1.1.1 Solución de una ED

Una función y=f(x) se llama **solución** de una ecuación diferencial dada en algún intervalo abierto a < x < b si f(x) está definida y es diferenciable en dicho intervalo y es tal que al sustituir la función y su derivada la ecuación se convierte en una identidad. La curva (el gráfico) de la función se llama **curva solución.**

El intervalo “I” en el cual existe o es válida la solución de una ecuación diferencial se llama intervalo de definición o intervalo de existencia. Esto implica que debe conocerse el dominio de la solución de la ED.

Ejemplo 3 Verificación de una solución

$$\textit{solución} \qquad y = xe^x; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x\ (x+1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x\ (x+2)$$

$$e^x\ (x+2) - 2e^x\ (x+1) + xe^x = 0$$

$$e^x(x+2-2x-2+x) = 0$$

$$0 = 0$$

Ejemplo 4 Curvas solución

La ecuación diferencial $xy' - y = x^2 sen(x)$ tiene la solución $y = cx - xcos(x)$, donde c es una constante arbitraria, esto es una familia de soluciones. Cada valor de c , por ejemplo , 0.5 o 2 , da una curva solución.

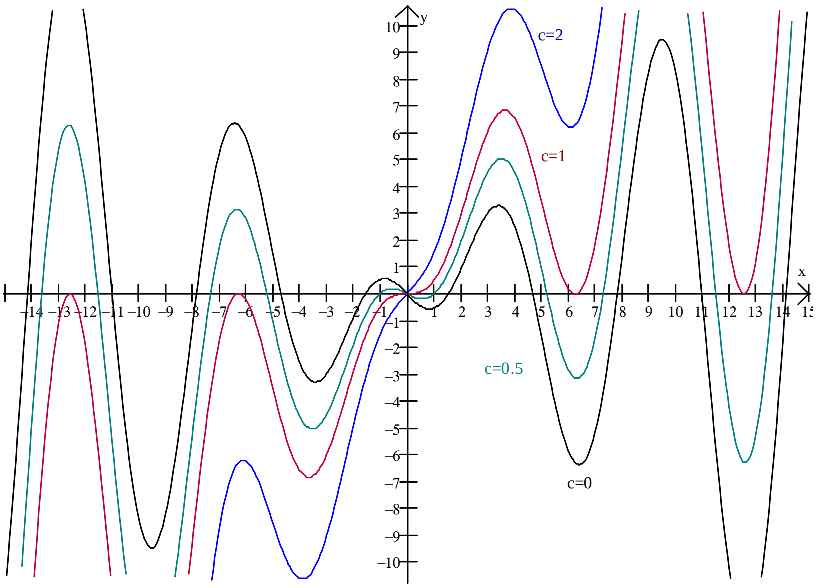


Fig 2. Curvas solución

La solución que contiene una constante arbitraria c se llama **solución general** de la EDO. Geométricamente, la solución general de una EDO es una familia de muchas curvas solución, una por cada valor de la constante c. Si se elige un valor específico de c se obtiene lo que se denomina **solución particular** de la EDO. Una solución particular no contiene ninguna constante arbitraria.

Una función $y = f(x)$ se llama **solución explícita** tal que al sustituirla en vez de *'y'* en la ecuación diferencial, satisface la ecuación para toda *'x'* en el intervalo 'I' es una solución explicita de la ecuación en 'I'.

Ejemplo 5 Solución explícita

Demostrar que $y(x) = \cos(4x) + \mathrm{sen}(4x)$ es una solución explicita de la EDO $y'' + 16y = 0$

Procedemos a derivar y(x) para verificar que sea solución de la EDO

$$y'(x) = -4sen(4x) + 4\cos(4x)$$
$$y''(x) = -16cos(4x) - 16sen(4x)$$

Al sustituir en la EDO :

$$-16cos(4x) - 16sen(4\mathrm{x}) + 16cos(4x) + 16sen(4\mathrm{x}) = 0$$

Como esto es válido para cualquier valor de "x", la función es una solución explicita.

Se dice que una relación F(x, y)=0 es una **solución implícita** de la ecuación diferencial en el intervalo 'I' si define una o más soluciones explicitas en 'I'.

Ejemplo 6 Solución implícita

Mostrar que $x + y + e^{xy} = 0$ es una solución implícita de la EDO $(1 + xe^{xy})\frac{dy}{dx} + ye^{xy} + 1 = 0$

Al derivar en forma implícita se tiene :

$$1 + \frac{dy}{dx} + \left(y + x\frac{dy}{dx}\right)e^{xy} = 0$$
$$1 + \frac{dy}{dx} + ye^{xy} + xe^{xy}\frac{dy}{dx} = 0$$
$$(1 + xe^{xy})\frac{dy}{dx} + ye^{xy} + 1 = 0$$

Como se aprecia se obtiene la EDO original.

1.1.2 Problema de valor inicial

En la mayoría de los casos la única solución de un problema dado, por ende una solución particular se obtiene de una solución general por una **condición inicial** $y(x_0) = y_0$, con valores dados x_0 y y_0 , eso es usado para determinar un valor de la constante arbitraria c. Geométricamente la condición significa que la curva solución podría pasar por el punto (x_0, y_0). Una ecuación diferencial con una condición inicial se llama problema de valor inicial. Es decir la forma

$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (10)$$

Ejemplo 7 Problema de valor inicial

$$EDO: \quad \frac{dy}{dx} = 3y \qquad CI: \quad y(0) = 2$$

La solución general es $y = ce^{3x}$. De esta solución aplicando la condición inicial x= 0 , y=3 se obtiene :

$$2 = ce^0 \qquad , c = 2$$

La solución particular es $y = 2e^{3x}$

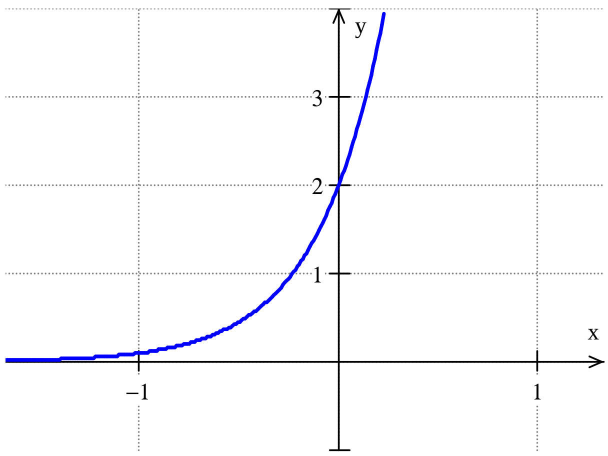


Fig 3. Curva solución pasa por (0,2)

1.1.3 Pasos de modelación

Ahora consideraremos un problema físico básico que se mostrará con los pasos típicos de modelación.

Paso 1: La transición de una situación física a su formulación matemática (modelo matemático)
Paso 2: la solución por un método matemático
Paso 3: la interpretación física del resultado

Esto permitirá obtener la naturaleza y propósito de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. El paso 2 requiere un sólido conocimiento y buen entendimiento de los métodos de solución, se puede elegir el método para trabajar a mano o mediante computadora. Tener esto en cuenta, y siempre verificar los resultados de la computador en busca de errores (pueden ser por entradas falsas).

1.2 ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES

Muchas EDOS útiles pueden ser reducidas a la forma

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (1)$$

Por manipulaciones algebraicas. Entonces se puede integrar ambos lados de la ecuación separando los diferenciales, obteniendo

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + c \qquad (2)$$

Si f y g son funciones continuas, las integrales en (2) existen, y luego de evaluarlas se obtiene una solución general de (1). Este método de solución se llama separación de variables, y (1) se llama una ecuación separable, porque en (2) las variables están separadas con sus diferenciales.

Ejemplo 8 EDO separable

$$y^{-1} \cdot dy + y \cdot e^{\mathrm{COS}(x)} \cdot \mathrm{SIN}(x) \cdot dx = 0$$

$$\frac{dy}{} = - y \cdot e^{\mathrm{COS}(x)} \cdot \mathrm{SIN}(x) \cdot dx \ y$$

$$\frac{dy}{y^2} = - e^{\mathrm{COS}(x)} \cdot \mathrm{SIN}(x) \cdot dx$$

$$y^{-2} \cdot dy = - e^{\mathrm{COS}(x)} \cdot \mathrm{SIN}(x) \cdot dx$$

$$\int y^{-2}\, dy = \int - e^{\mathrm{COS}(x)} \cdot \mathrm{SIN}(x)\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = e^{\mathrm{COS}(x)} + C$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(-\frac{1}{y} = e^{\mathrm{COS}(x)} + C,\ y\right)$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{e^{\mathrm{COS}(x)} + C}}$$

Ejemplo 9 EDO separable con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 2\cdot\sqrt{(y + 1)}\cdot COS(x)$$

Valor Inicial:

$y(\pi)=0$

$$\frac{dy}{2\cdot\sqrt{(y + 1)}} = COS(x)\cdot dx$$

$$\int \frac{1}{2\cdot\sqrt{(y + 1)}}\, dy = \int COS(x)\, dx$$

$\sqrt{(y + 1)} = SIN(x)$

Reemplazamos el valor inicial:

$\sqrt{(0 + 1)} = SIN(\pi) + C$

$SOLVE(\sqrt{(0 + 1)} = SIN(\pi) + C,\ C)$

$C = 1$

$$(y + 1)^{1/2} = SIN(x) + 1$$

$$SOLVE((y + 1)^{1/2} = SIN(x) + 1,\ y)$$

$$y = SIN(x)^2 + 2\cdot SIN(x)$$

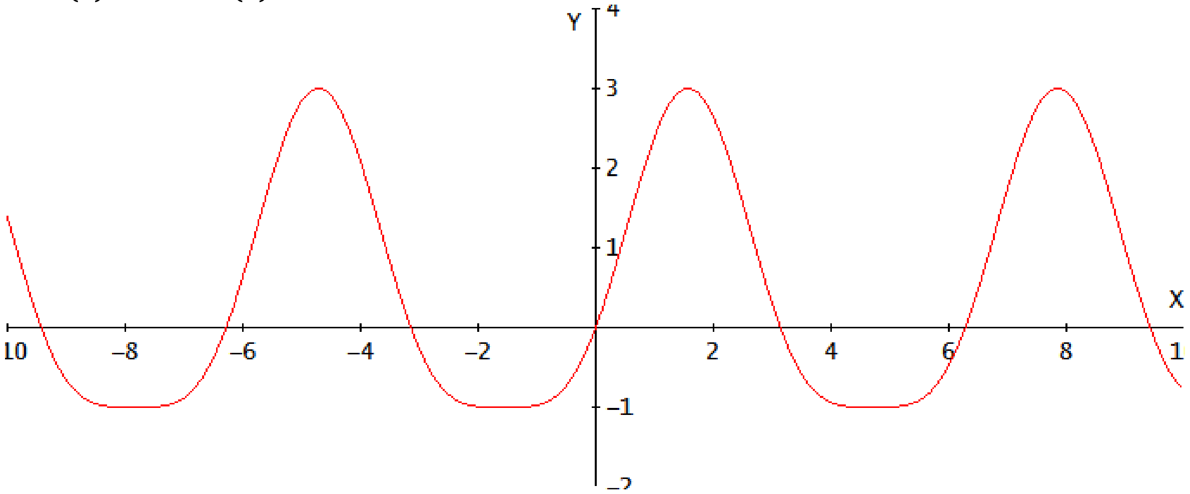


Fig 4. Curva solución pasa por (π,0)

Ejemplo 10 Problema de mezclas

La rapidez de cambio de la cantidad de una sustancia en un compartimiento con respecto al tiempo es igual a la diferencia entre la razón de entrada y la razón de salida.

A = cantidad de sustancia

$$\frac{dA}{dt} = Razon\ de\ ingreso - Razon\ de\ salida$$

$$Razon\ de\ ingreso = Q_i \cdot c_i$$

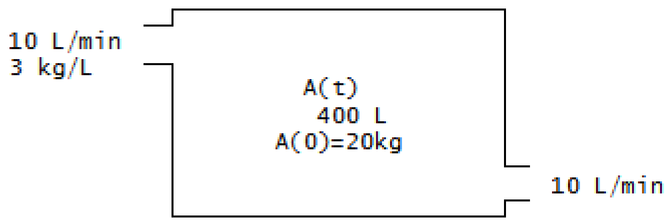
$$Razon\ de\ salida = Q_s \cdot c_s$$

Donde Q representa el caudal [volumen/t] y c representa la concentración de la sustancia [masa/volumen]

Suponga que una solución salina con 3kg de sal por litro se introduce en un tanque que contenía originalmente 400 litros de agua y 20kg de sal. Si la solución entra a razón de 10 litros/minuto, la mezcla se mantiene uniforme revolviéndola, y la mezcla sale con la misma razón, determine la masa de sal en el tanque después de 10 minutos.

Paso 1. Establecer el modelo

Sea A el número de kilogramos de sal en el tanque, t minutos después de iniciar el proceso se aplica el siguiente planteamiento
Rapidez de cambio de A = razón de entrada – razón de salida



A(t) es el número de kilogramos de sal en el tanque después de un tiempo t

Entonces tenemos:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \text{proporción de sal ingreso} - \text{proporción sal que sale}$$

$$\text{proporción sal ingreso} = 10\cdot\frac{L}{min}\cdot\frac{3(t)\ kg}{L}\cdot = \frac{30}{}\cdot\frac{Kg}{min}$$

Desde que el tanque guarda uniformemente, A(t)/400 es la masa de sal por litro que está fluyendo fuera del tanque en el tiempo t.

$$\text{proporción sal fuera} = 10\cdot\frac{L}{min}\cdot\frac{A(t)}{400}\cdot\frac{kg}{L} = \frac{A(t)}{40}\cdot\frac{Kg}{min}$$

entonces:

$$\frac{dA(t)}{dt} = 30 - \frac{A}{40} = \frac{1200 - A}{40}$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1200 - A}{40} \quad , \quad A(0) = 20$$

Paso 2. Solución matemática

$$\frac{40 \cdot dA(t)}{1200 - A} = dt$$

$$\int \frac{40}{1200 - A}\, dA = \int 1\, dt$$

$$-\,40 \cdot LN(A - 1200) = t + C$$

$$LN(A - 1200) = \frac{t}{-40} - \frac{C}{40}$$

–C/40 l dejamos solamente como C

Aplicamos exponencial:

$$-A + 1200 = C \cdot e^{-\,t/40}$$

$$A = C \cdot e^{-\,t/40} - 1200$$

Hay 20 kg de sal inicialmente en el tanque, así A(0) = 20. Usando esta condición inicial, nosotros encontramos:

$$20 = C \cdot e^{0/40} - 1200$$

$$SOLVE(20 = C \cdot e^{0/40} + 1200,\ C)$$

$$C = 1180$$

Substituimos en la solución:

$$\boxed{A = -\,1180 \cdot e^{-\,t/40} + 1200}$$

$$A(10) = -\,1180 \cdot e^{-\,10/40} + 1200 = 281 \cdot kg$$

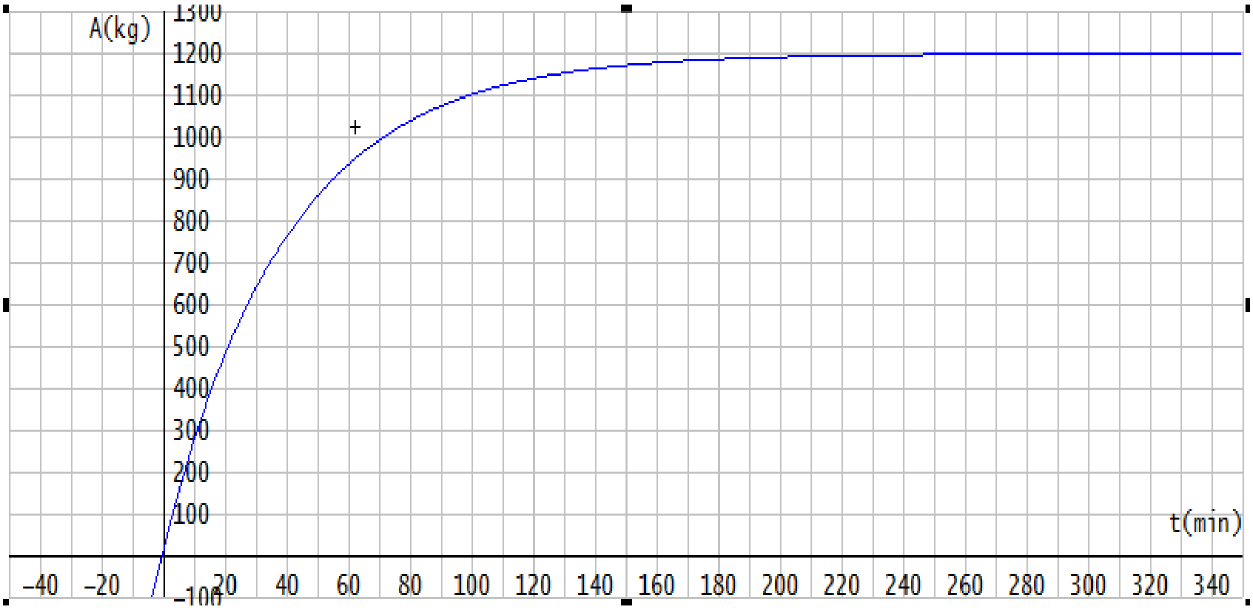


Fig 5. Curva solución -mezclas

Paso 3. Interpretación del resultado

Se verifica aproximadamente que la cantidad inicial de sal es de 20 kg. y en 10 min la cantidad es de 281 kg. En el intervalo 0<t<100 min crece más rápido la cantidad de sal mientras que para t>100 min la rapidez de crecimiento es menor (lento) .

En un tiempo relativamente mayor a 260 min , se estabiliza la cantidad de sal en un valor de 1200 kg. Lo cual se verifica con

$$\lim_{t\to+\infty}(1200-1140e^{-\frac{t}{40}})$$

$$\lim_{t\to+\infty} 1200-1140\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{40}}=1200-0=1200$$

Ejemplo 11 Población

La población de los estudiantes matriculados en la carrera de Ingeniería Civil en el año 2007 es de 782 estudiantes, en el año 2008 es de 812 estudiantes y en el año 2009 es de 834 estudiantes, entonces la rapidez con que la población cambia es proporcional a la cantidad de estudiantes matriculados en dicho instante. Queremos determinar la cantidad de estudiantes que habrá en el año 2014 y la cantidad de estudiantes que había en el año 2002, tomando los datos del año 2007 y del 2009.

Paso 1. Establecer el modelo

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}}=(\mathrm{kP}) \qquad \textit{Modelo básico de población}$$

En donde:
P_0 población inicial
El año 2007 para t=0
El año 2009 para t=2
P (0)=782
P (2)=834

Paso 2. Solución matemática

Separo variables

$$\frac{1}{p}\text{dP} = (\text{k})(\text{dt})$$

$$\int \frac{1}{p}\text{dP} = \int (\text{k})(\text{dt})$$

$$\ln|\text{P}| = \text{kt}$$

$$\text{P} = (\text{Po})(e^{kt})$$

Buscamos el valor de K para poder graficar y comprender el ejercicio.

$$\ln\left|\frac{834}{732}\right| = 2\text{k}$$

$$K = 0{,}032189$$

Modelo de población de los estudiantes matriculados en la carrera de Ingeniería Civil:

$$P = (782)(e^{0.032189 \times t})$$

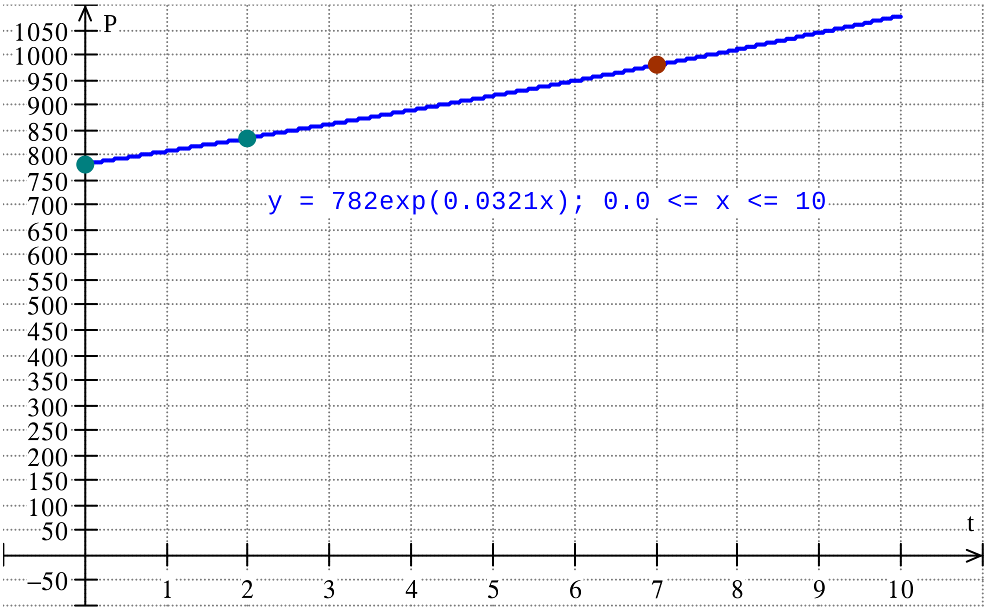


Fig 6. Curva solución -población

Paso 3. Interpretación del resultado

Como ya se tiene los valores necesarios reemplazamos el tiempo de siete años determinar el número de estudiantes proyectados

$$\text{P} = (782)(e^{0.032189 \times 7}) = 979$$

Es decir en el año 2014 habrá 979 estudiantes aproximadamente, y 5 años antes había:

$$\text{P} = (782)e^{0.032189*(-5)}$$

P= 665 ESTUDIANTES

Ejemplo 12 Ley de enfriamiento de Newton

Un metal C se calienta hasta alcanzar una temperatura de 118 ˚C luego de ello se lo coloca en un cuarto cuya temperatura es de 29 ˚C, luego de haber transcurrido tres minutos una segunda medición da una temperatura de 99 ˚C ¿cuánto tiempo le tomara al metal llegar a la temperatura del medio?

El modelo matemático a usarse es la ley de enfriamiento de newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$$

Cundo $T(0) = 118$ °C , como menciona que luego de tres minutos la temperatura es 99 $°C$ entonces la ecuación diferencial queda expresada como:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 29) \qquad\qquad T(0) = 118\,°\text{C};\;\; T(3) = 99$$

Como se puede observar la ecuación es una EDO lineal que se puede resolver por medio del método de variables separables ya que hay un producto en dicha ecuación $k(T - 20)$, también se debe mencionar que la VD es la temperatura, y la VI es el tiempo.

Luego de reconocer la ecuación resolvemos:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 29)$$

$$\frac{dT}{T - 29} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T - 29} = k \int dt$$

$$\ln(T - 29) = kt + C$$

$$T(0) = 118$$

$$C = ln\, 89$$

$$\ln(T - 29) = kt + \ln 89$$

$$T(3) = 99$$

$$k = \frac{1}{3}\left(ln \frac{70}{89}\right)$$

$$\ln(T - 29) = \left(\left(\frac{1}{3} ln \frac{70}{89}\right)\right) t + \ln 89$$

$$T - 29 = e^{\left(\left(ln\frac{70}{89}\right)/3\right)t} . e^{ln 89}$$

$$T - 29 = e^{\left(\left(ln\frac{70}{89}\right)/3\right)t} \cdot 89$$

$$T = 29 + 89e^{-0.08 \cdot t}$$

Como en la ecuación diferencial no es posible determinar el tiempo exacto en el que se enfría ya que a despejar el tiempo nos queda un logaritmo de un número negativo por lo cual nos guiamos por medio de la tabla para determinar el tiempo de enfriamiento

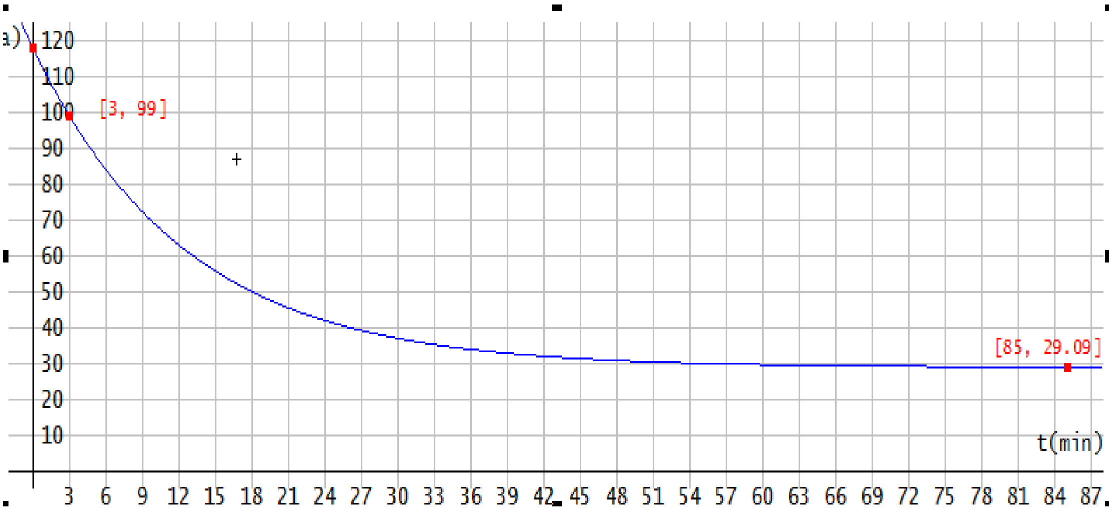


Fig 7. Curva solución -temperatura

Ejemplo 13 Circuitos eléctricos

Los circuitos de primer orden son circuitos que contienen solamente un componente que almacena energía, que puede estar compuesto por un condensador o un inductor, y que se puede describir con una ecuación diferencial de primer orden.
Los dos posibles tipos de circuitos de primer orden pueden ser:
Circuito RC , Resistor y capacitor
Circuito RI , resistor e inductor

Cuando un circuito en serie solo contiene un resistor y un inductor , la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de las caídas de voltaje a través de un inductor(L(di/dt)) y del resistor IR es igual al voltaje aplicado(E(t)). Como se lo indica en la Gráfica.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

En L y R son las constantes conocidas como inductancia y resistencia respectivamente, la corriente i(t) es la respuesta del sistema.

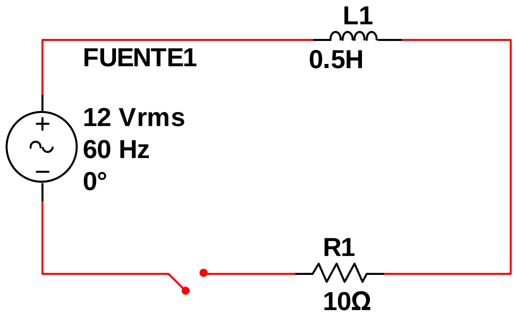
Circuito RC
La caída de voltaje a través de un capacitor es q(t)/C, donde q es la carga del capacitor, entonces establecemos que para un circuito RC utilizamos la segunda ley de Kirchhoff.

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t)$$

La corriente i y la carga q se relacionan mediante i= dq/dt como se muestra en la ecuación anterior y se transforma en la ecuación diferencial lineal

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Una fuente de 12volts se conecta a un circuito en serie con una inductancia de 1/2H y una resistencia de 10 ohmios. Determinar la corriente i, si la corriente inicial es cero.



Para resolver esta ecuación utilizamos la siguiente formula:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \qquad \frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12$$

Primero multiplicamos la ecuación diferencial por 2, y se observa que el factor integrante es e^{20t}, lo sustituimos en la ecuación

$$\frac{di}{dt} + 20i = 24$$

$$\frac{di}{dt} = 24 - 20i$$

$$\frac{di}{24 - 20i} = dt$$

$$\int \frac{1}{24 - 20i} di = \int dt$$

$$-\frac{\ln(5i - 6)}{20} = t + A$$

Se despeja i obtenemos $\qquad i = \frac{6}{5} + ce^{-20t}$

$$la\ condicion\ inicial\ es\ \ i(0) = 0$$

Precedemos a remplazar y por consiguiente la respuesta es:

$$0 = \frac{6}{5} + c \qquad c = \ -\ \frac{6}{5}$$

$$i(t) = \frac{6}{5} - \ \frac{6}{5}e^{-20t}$$

La corriente tiene un comportamiento exponencial decreciente , por tanto luego de un tiempo relativamente grande la corriente se estabiliza en 6/5 amperios.

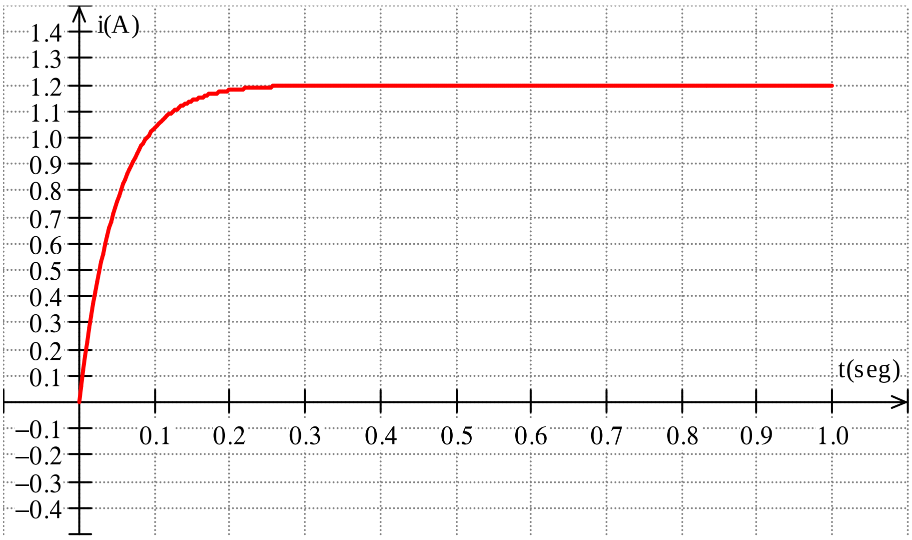


Fig 8. Curva solución -corriente

1.3 ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en una ecuación diferencial ordinaria donde intervienen derivadas de primer orden respecto a una variable independiente.
Tiene la siguiente forma:

$$a_1(x)\ \frac{dy}{dx} + \ a_0(x)y = b(x) \qquad (1)$$

Donde $a_1(x), a_0(x) y\ b(x)$ solo dependen de la varibale independiente x, no asi de y.

La cual se escribirá en la forma canoníca dividiendo por $a_1(x)$, como:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = \ Q(x) \qquad (2)$$

Si *b(x)* es igual a 0, la ecuación diferencial se la denominara como ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea

Si *b(x)* es diferente de 0, la ecuación será denominada como Ecuación Diferencial lineal de primer orden completa.

1.3.1 Factor Integrante

A partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = \ Q(x)$$

Se quiere determinar $\mu(x)$ de modo que el lado derecho de la ecuación multiplicada

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \ \mu(x)Q(x)$$

Es claro que para esto μ debe satisfacer

$$\mu' = \mu P$$

Para hallar tal función, reconocemos que la ecuación $\mu' = \mu P$ es una ecuación diferencial separable, que podemos escribir como $\frac{1}{\mu} d\mu = P(x)dx$. Al integrar ambos lados obtenemos:

$$\mu = e^{\int P(x)dx}$$

1.3.2 Método para resolver ecuaciones lineales

- Escriba la ecuación en forma canónica (estándar)
  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
- Halle el factor integrante $\mu(x)$ mediante la fórmula

  $\mu = e^{\int P(x)dx}$
- Multiplique la ecuación en forma canónica por $\mu(x)$ y, recordando que el lado izquierdo es precisamente $\frac{d}{dx}(\mu(x)y)$, obtenga:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)Q(x)$$

- Integre la última ecuación y despejar la variable dependiente :

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left\{\int \mu(x)Q(x)dx + C\right\}$$

Ejemplo 14

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{3 \cdot x}$$

$P(x) = 1$

Utilizamos la fórmula de factor integrante

$$\mu = e^{\int (-1)\ dx}$$

Multiplicamos toda la ecuación por el factor integrante

$$e^{-x} \cdot \frac{dy}{dx} - e^{-x} \cdot y = e^{-x} \cdot e^{3 \cdot x}$$

$$e^{-x} \cdot \frac{dy}{dx} - e^{-x} \cdot y = e^{2 \cdot x}$$

Procedemos a integrar

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{-x} \cdot y\right)\ dx = \int e^{2 \cdot x}\ dx$$

$$y e^{-x} - y = \int e^{2\cdot x}\, dx$$

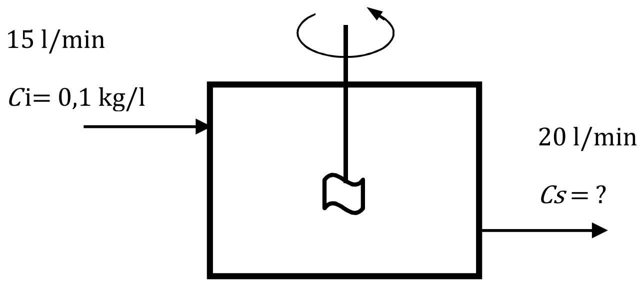
$$y e^{-x} = \frac{e^{2\cdot x}}{2} + C$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(y\, e^{-x} = \frac{e^{2\cdot x}}{2} + C,\ y\right)$$

$$= \frac{e^{3\cdot x}}{2} + C\, e^{x}\ y$$

Ejemplo 15 Problema de mezclas (caudales diferentes)

Un depósito contiene 50 litros de salmuera con 1kg de sal disuelta en ella. Se introduce en el depósito salmuera que contiene disuelto 0,1 kg de sal por litro a razón de 15 litros por minuto y la mezcla, bien revuelta, se deja salir a una tasa de 20 litros por minuto. Hallar la cantidad de sal y(t) en el depósito en un instante cualquiera.



- Nuestra incógnita es y(t), la cantidad de sal en el tanque para un tiempo *t*.
- Observemos ante todo que el volumen de líquido irá disminuyendo, dado que entran 15 l/min y se pierden 20 l/min, lo que indica una pérdida neta de 5 l/min. Por ende, a un tiempo t se habrán perdido 5t litros y el volumen remanente será:

$$v(t) = 50 - 5t$$

- Observemos que, dada la buena agitación que recibe el contenido del tanque, es razonable considerar que la concentración en el mismo es uniforme, y por lo tanto igual a la concentración a la salida.
- Concentración en el tanque

$$= \frac{y(t)}{V(t)} = \frac{y(t)}{50 - 5t} = C_S(t)$$

- Veamos ahora cuál es la variación de la cantidad total de sal en el tanque. Por un lado se recibe un chorro de 15 l/min a 0,1 kg/l; el producto entre estos dos valores nos da la cantidad de sal que se va ganando por minuto. Por otro lado, sale del tanque un chorro de 20 l/min, a una concentración variable en el tiempo y que vendrá dada por $y(t)/(50\text{-}5t)$; el producto entre ambos nos dará la cantidad de sal que se pierde por minuto. Por lo tanto

$$\frac{dy}{dt} = 15 \times 0{,}1 - 20\frac{y}{50 - 5t}$$

Variación de sal = entrada - salida

ordenando la EDO: $$\frac{dy}{dt}+\frac{20}{50-5t}y=1{,}5$$; $y(0) = 1$

La condición inicial nos dice que en un tiempo de cero la concentración del tanque es 1kg

La función $P(t)$, es $20/(50\text{-}5t)$. Para aplicar el factor integrante :

$$u=e^{\int\frac{20}{50-5t}dt}=e^{-4\log(50-5t)}=(50-5t)^{-4}$$

Y multiplicando el factor por la anterior ecuación diferencial queda:

$$50-5t)^{-4}\frac{dy}{dt}+(50-5t)^{-4}\frac{20}{50-5t}y=1{,}5(50-5t)^{-4}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left[(50-5t)^{-4}y\right]=1{,}5(50-5t)^{-4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(50-5t)^{-4}y=-0{,}5(50-5t)^{-3}+C\Rightarrow y=-0{,}5(50-5t)+C(50-5t)^{4}$$

Aplicando la condición inicial nos queda:

$y(0) = 1 = -25 + 50^4C \Rightarrow C = 26/50^4 = 4{,}1610\times10^{-6}$

entonces nos da:

$$y=-0{,}5(50-5t)+4{,}16\times10^{-6}(50-5t)^{4}\quad(\text{kg})$$

Obsérvese que esta expresión, a los 10 s, nos da una cantidad de sal nula, lo que significa que se vaciará la toda la cantidad de sal .

1.4 VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Este método es de gran utilidad para resolver ecuaciones lineales de orden superior, este se basa en la idea de conocer tan solo la *forma* de la solución, podemos sustituirla en la ecuación dada y hallar el valor de todas las incógnitas, aquí se ilustra el método para las ecuaciones de primer orden:

La solución general de

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

Tiene la forma

$$y(x) = Y_h(x) + Y_p(x)$$

Donde y_h es una solución homogénea de la ecuación (1) cuando $Q(x) = 0$, y la solución particular $y_p(x) = v(x)y_h(x)$ para una función adecuada $v(x)$.

Al conocer la forma de la solución homogénea , podemos determinar la función incógnita y_p resolviendo una ecuación separable. Después, una sustitución directa en la ecuación original dará una ecuación sencilla donde puede hallarse $v(x)$.

Aplique este procedimiento para determinar la solución general de:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = x^2, \qquad x > 0 \qquad (2)$$

Completando los siguientes pasos:

a) Determine una solución no trivial y_h de la ecuación separable

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 0, \qquad x > 0 \qquad (3)$$

b) Suponiendo que (2) tiene una solución de la forma $y_p(x) = v(x)y_h(x)$, sustituya esto en la ecuación (2) y simplifique para obtener $v'(x) = \frac{x^2}{y_h(x)}$.

c) Ahora, se integra para obtener *v(x)*.

d) Verifique que $y(x) = CY_h(x) + v(x)y_h(x)$ es una solución general de (2)

1.5 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

1.5.1 Definición de Ecuación Exacta

Una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si existe una función $F(x,y)$, llamada función potencial de la ecuación diferencial, cuya diferencial coincide con $M(x,y)dx + N(x,y)dy$, es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \text{ y } \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

Si $M, N, \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial y}$ son continúas en un rectángulo R de plano,

Entonces $Mdx + Ndy = 0$ es exacta en R si y solo si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $en\ R$

1.5.2 Método para resolver Ecuaciones Diferenciales Exactas

- Si $M\ \ dx + Ndy = 0$ es exacta, entonces $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ Se integra esta última ecuación con respecto a $\boldsymbol{x}$ para obtener:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\partial x + g(y) \qquad (1)$$

- Si $M\ \ dx + Ndy = 0$ es exacta, entonces $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ Se integra esta última ecuación con respecto a **y** para obtener:

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,\partial y + h(x) \qquad (2)$$

- Se compara (1) y (2) para determinar g(y) , y h(x)

- La solución de $Mdx + Ndy = 0$ esta dada de manera implícita por:

$$F(x,y) = C$$

Ejemplo 16

$$\left(\frac{1}{x} + 2\cdot y^2\cdot x\right)\cdot dx + (2\cdot y\cdot x^2 - \mathrm{COS}(y))\cdot dy = 0$$

Valor inicial: $y(1)=\pi$

$M_y = 4xy \quad N_x = 4xy$, por lo tanto es una EDO exacta .

$$F = \int \left(\frac{1}{x} + 2\cdot y^2\cdot x\right)\,dx$$

$$F = \mathrm{LN}(x) + x^2\cdot y^2 + g(y)$$

$$F = \int (2\cdot y\cdot x^2 - \mathrm{COS}(y))\,dy$$

$$F = x^2\cdot y^2 - \mathrm{SIN}(y) + h(x)$$

Comparando las dos funciones solución queda :

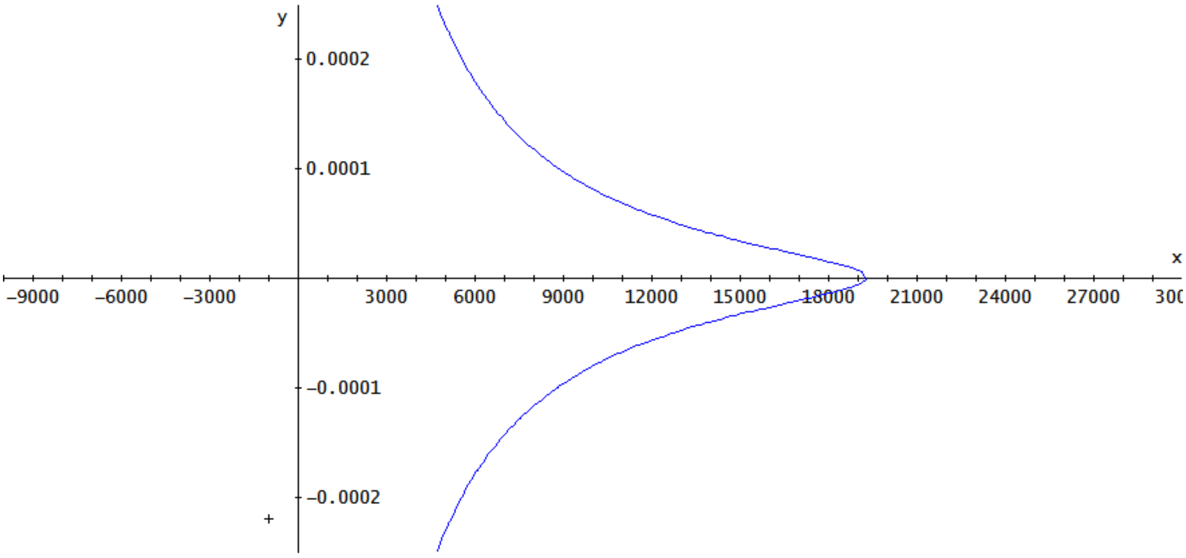
$$x^2\cdot y^2 - \mathrm{SIN}(y) + \mathrm{LN}(x) = C$$

Remplazando valor inicial

$$1^2\cdot \pi^2 - \mathrm{SIN}(\pi) + \mathrm{LN}(1) = C$$

$$\pi^2 = C$$

$$\boxed{x^2\cdot y^2 - \mathrm{SIN}(y) + \mathrm{LN}(x) = \pi^2}$$



1.6 FACTORES DE INTEGRACIÓN

Definición

Se denomina factor integrante $\mu(x,y)$ a cualquier función tal que multiplicando por ella la ecuación diferencial ordinaria de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)\,dy = 0$ se obtiene la ecuación diferencial exacta:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0$$

En general la expresión de un factor integrante se obtiene resolviendo la ecuación
en derivadas parciales:

$$M(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial y}(x,y) - N(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial x}(x,y) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right)$$

Casos Particulares

Caso en el que el factor integrante depende de una expresión conocida z(x,y)

En este caso el factor integrante se obtiene mediante:

$$\mu(z) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial z}{\partial y} - N\frac{\partial z}{\partial x}} dz}$$

Caso en el que el factor integrante solo depende de la variable independiente x

En este caso el factor integrante se obtiene mediante:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{N(x,y)} dx}$$

Caso en el que factor integrante solo depende la variable dependiente y

En este caso el factor integrante se obtiene mediante:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y)} dy}$$

La ecuación diferencial no lineal de primer orden:

$$xy\ dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$$

No es exacta, si definimos a $M = xy, N = 2x^2 + 3y^2 - 2$, se determinan las derivadas parciales $M_y = x$ y $N_x = 4x$. Como podemos observar no es exacta, para poder convertir se utiliza cualquiera de las siguientes formulas dependiendo del factor que se desee encontrar:

(1) $\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$ (2) $\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$

Para nuestro caso utilizaremos la fórmula (2) ya que el factor que vamos a encontrar no debe quedar en función de **y** :

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{4x - x}{xy} = \frac{3}{y}$$

Entonces el factor que encontramos es $e^{\int \frac{3}{y} dy} = e^{3\ln y} = e^{\ln y^3} = y^3$

Una vez encontrado el factor se lo multiplica a toda la ecuación por el dicho factor:

$$xy^4 + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)dy = 0$$

Después de haber multiplicado se debe comprobar que se transformo a una ecuación exacta.

Ejemplo 17

$$2 \cdot x \cdot y \cdot dx + (y^2 + 3 \cdot x^2) \cdot dy = 0$$

$$\frac{d}{dy}(2 \cdot x \cdot y)$$

$$\frac{d}{dy}(2 \cdot x \cdot y) \neq \frac{d}{dx}(y^2 + 3 \cdot x^2)$$

$$2 \cdot x \neq 6 \cdot x$$

La EDO no es exacta y se la debe multiplicar por un factor integrante :

$$u = e^{\int((Nx - My)/m)}$$

$$u = e^{\int (6 \cdot x - 2 \cdot x)/(2 \cdot x \cdot y)\ dy}$$

$$u = e^{\int 4 \cdot x/(2 \cdot x \cdot y)\ dy}$$

$$u = e^{\int 2/y\ dy}$$

$$u = y^2$$

se multiplica el factor encontrado por toda la ecuación :

$$2 \cdot x \cdot y^{3} \cdot dx + (y^{4} + 3 \cdot x^{2} \cdot y^{2}) \cdot dy = 0$$

$$\frac{d}{dy}(2 \cdot x \cdot y^{3}) = \frac{d}{dx}(y^{4} + 3 \cdot x^{2} \cdot y^{2})$$

$$\boxed{6 \cdot x \cdot y^{2} = 6 \cdot x \cdot y^{2}}$$

Una vez que ya se haya multiplicado por el factor integrante encontrado la ecuación diferencial se convierte en Exacta y se continua con el proceso normal para resolver una ecuación diferencial exacta.

$$(2 \cdot x \cdot y^{3}) \cdot dx + (y^{4} + 3 \cdot x^{2} \cdot y^{2}) \cdot dy = 0$$

$$F = \int 2 \cdot x \cdot y^{3}\, dx$$

$$F = x^{2} \cdot y^{3} + g(x)$$

$$F = \int (y^{4} + 3 \cdot x^{2} \cdot y^{2})\, dy = 0$$

$$F = \frac{y^{5}}{5} + x^{2} \cdot y^{3} + h(y)$$

$$\frac{y^{5}}{5} - x^{2} \cdot y^{3} = c$$

1.7ECUACIONES CONVERTIBLES (SUSTITUCIONES)

Las ecuaciones diferenciales que son más fáciles de poder resolver mediante la conversión a variables separables son fáciles de reconocer ya que estas son ecuaciones diferenciales homogéneas, existen varias formas de definir este tipo de ecuaciones para lo cual tenemos:

1.7.1 Ecuación Diferencial Homogénea

Una Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden de la forma:

$$y' = F(\frac{y}{x})$$

Se dice que es homogénea si al hacer el cambio de variable $y = u \cdot x$, donde u es una nueva funcion incógnita, en la expresión de $F(\frac{y}{x})$ es posible, mediante algebra, eliminar todos los términos en x, es decir:

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = F(u)$$

Para poder reconocer estas ecuaciones se debe tener en cuenta:

- Tanto en el numerador como el denominador de $F\left(\frac{y}{x}\right)$ el grado de los términos deben ser el mismo.

Resolución de ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial ordinaria homogénea puede resolverse usando la siguiente estrategia:

- Se cambia: $y = u \cdot x$ a $y' = u + x \cdot u'$ en la ecuación diferencial.
- Se simplifica y despeja u': la nueva ecuación diferencial debe ser de variables separables
- Se resuelve la nueva ecuación diferencial para u (por variables separables).
- En la solución se cambia u por $\frac{y}{x}$

Ejemplo 18

$$-y\cdot dx + (x + \sqrt{(x\cdot y)})\cdot dy = 0$$

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y = u\cdot x$$

$$dy = d\cdot(u\cdot x)$$

$$dy = du\cdot x + u\cdot dx$$

$$-\frac{y}{x}\cdot dx + \left(\frac{x}{x} + \sqrt{\left(\frac{x\cdot y}{x^2}\right)}\right)\cdot dy = 0$$

se sustituye los valores de y/x con u y dy = dux + udx

$$-u\cdot dx + (1 + \sqrt{u})\cdot dy = 0$$

$$-u\cdot dx + (1 + \sqrt{u})\cdot(du\cdot x + u\cdot dx) = 0$$

$$x\cdot(\sqrt{u} + 1)\cdot du = u^{3/2}\cdot dx$$

$$\frac{\sqrt{u} + 1}{u^{3/2}}\cdot du = \frac{dx}{x}$$

$$\int u^{3/2}\, du + \int \frac{1}{u}\, du = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$LN(u) + \frac{2\cdot u^{5/2}}{5} = -LN(x) + C$$

$$LN\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{5/2}}{5} = -LN(x) + C$$

1.7.2 Ecuaciones de la Forma $\frac{dy}{dx} = G(ax + by)$

Cuando al lado derecho de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ se puede expresar como una función de la combinación de $ax + by$ donde a y b son constantes, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = G(ax + by),$$

Entonces la sustitución es:

$$z = ax + by$$

transforma la ecuación en una ecuación separable.

Ejemplo 19

$$\frac{dy}{dx} = (x - y + 5)^2$$

se realiza el siguiente cambio de variable:

$$z = x - y$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$$

Se reemplaza en la ecuacion anterior:

$$\frac{dy}{dx} = [(x - y) + 5]^2$$

$$1 - \frac{dz}{dx} = (z + 5)^2$$

$$-\frac{dz}{dx} = (z + 5)^2 - 1$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - (z + 5)^2$$

$$-\int \frac{1}{(z + 5)^2} dz = \int 1\, dx$$

$$\frac{1}{z + 5} = x + C$$

$$\boxed{\frac{1}{x - y + 5} = x + C}$$

1.7.3 Ecuación de Bernoulli

La Ecuación de Bernoulli es una ecuación de primer orden la misma que se puede escribir en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en un intervalo (a,b) y n es un numero real, es una ecuación de Bernoulli.

En el caso de que n=0 o 1, la ecuación de Bernoulli es una ecuación lineal la misma q se puede resolver mediante la sustitución para todos los valores de n, la sustitución

$$\boldsymbol{v = y^{1-n}}$$

Esto hace que ecuación de Bernoulli se transforme en una de ecuación lineal como se puede demostrar en la siguiente ecuación:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \qquad (1)$$

Al hacer $\boldsymbol{v = y^{1-n}}$ **y** usar la regla de la cadena vemos que

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

De modo que la ecuación (1) se convierte en:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

Como 1/(1-n) es solo una constante, la ultima ecuación obtenida realmente es lineal.

Ejemplo 20

$$\frac{dy}{dx} = y\cdot(x\cdot y^{3} - 1)$$

$$y' = x\cdot y^{4} - y$$

$$y' + y = x\cdot y^{4}$$

$$n = 4$$

$$v = y^{-3}$$

$$v' = -3\cdot y^{-4}\cdot y'$$

$$-3\cdot y^{-4}\cdot(y' + y) = (-3\cdot y^{-4})\cdot x\cdot y^{4}$$

$$-3\cdot y^{-4}\cdot y' - 3\cdot y^{-3} = -3\cdot x$$

$$v' - 3\cdot v = -3\cdot x$$

se obtiene una ecuación lineal en v y se resuelve con factor integrante

$$z = \mathrm{EXP}(\textstyle\int -3\ dx)$$

$$z = e^{-3\cdot x}$$

$$e^{-3\cdot x}\cdot(v' - 3\cdot v) = e^{-3\cdot x}\cdot(-3\cdot x)$$

$$e^{-3\cdot x}\cdot(v' - 3\cdot v) = -3\cdot x\cdot e^{-3\cdot x}$$

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(e^{-3\cdot x}\cdot v\right) = -3\cdot x\cdot e^{-3\cdot x}$$

$$e^{-3\cdot x}\cdot v = \int -3\cdot x\cdot e^{-3\cdot x}\,dx$$

$$e^{-3\cdot x}\cdot v = x\cdot e^{-3\cdot x} + \frac{e^{-3\cdot x}}{3} + C$$

$$\text{SOLVE}\left(e^{-3\cdot x}\cdot v = x\cdot e^{-3\cdot x} + \frac{e^{-3\cdot x}}{3} + C,\ v\right)$$

$$v = C\cdot e^{3\cdot x} + x + \frac{1}{3}$$

$$y^{-3} = C\cdot e^{3\cdot x} + x + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{y^{3}} = C\cdot e^{3\cdot x} + x + \frac{1}{3}$$

7. ACTIVIDADES Y EJERCICIOS PROPUESTOS

7.1 En la siguiente tabla, clasifique la Ecuación Diferencial, por los criterios de Tipo, Orden, Linealidad, Homogénea o No Homogénea, en la última columna indique la función incógnita, aclarando además cuál es la variable dependiente y la o las variables independientes en esta función:

ECUACIÓN DIFERENCIAL	TIPO	ORDEN	LINEAL	HOMOGÉNEA MARQUE CON UNA (X)	NO HOMOGÉNEA MARQUE CON UNA (X)	V.D.	V.I.
$\frac{dy}{dx} + 3y = e^{2x}$							
$\frac{d^4q}{dt^4} + qsen(t) = \frac{e^{-2t}}{q^3}$							
$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$							
$\frac{P^2}{4K}dt + (K-P)dP = 0$							
$\frac{\partial u}{dx} - \left(\frac{\partial u}{dt}\right)^2 = 3x$							

7.2 En cada uno de los problemas, verifique que la función o funciones que se dan son una solución de la ecuación diferencial:

a) $xy' - y = x^2$; $y = 3x + x^2$

b) $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{x}$

7.3 Dada la EDO de segundo orden : $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$

a) Comprobar que la solución es $x(t) = e^{t}(C_1 \cos(2t) + C_2 sen(2t))$

b) Como sería la solución particular, si se tienen las condiciones iniciales, $x(0)=1$ y $\dot{x}(0)=-1$,

c) Ayudarse de software para graficar la solución para el intervalo $0<t<4$.

7.4 Determinar si la ecuación es separable y halle su solución :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x^2}{3y^2}$$

7.5 Obtener la solución general

a) $\frac{dy}{dx} - 2y = xe^{3X}$

b) $x\frac{dy}{dx} - 3y + 2x^2 = x^3 - 4x$

c) $\frac{dy}{dx} + 4y - e^{-2x} = 0 \qquad y(0) = 1$

7.6 Resuelva la ecuación diferencial $y' - (\tan x)y = sen(x)$,

a) por el método de variación de parámetros
b) mediante factor integrante.

7.7 Sea la ecuación diferencial $xy' - 2x^2y = e^{x^2}$ ¿qué función $u(x)$ es la que debemos tomar para hallar la solución por el método de variación de parámetros?

a) $\mathrm{u} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}^2}$
b) $\mathrm{u} = -2\mathrm{x}$
c) $\mathrm{u} = \ln \mathrm{x}$
d) $\mathrm{u} = \ln \mathrm{x} + \mathrm{c}$

7.8 Determine si la ecuación es exacta. Si lo es, resuélvala.

$$(2xy + 3)dx + (x^2 - 1)dy = 0$$

7.9 Escoger la opción que contiene un factor de integración de la ecuación diferencial dada y luego úselo para resolverla.

$$(1 + xy)\, dx + \left(\frac{x}{y} + x^2\right) dy = 0$$

a) $1/y$
b) x
c) y
d) $1/x$

7.10 Escoger la opción que contiene la solución particular de la ecuación diferencial dada, justifique su respuesta:

$$x\left(e^{y/x} - 1\right)y' = e^{y/x}(y - x) \qquad para\; y(1) = 0$$

a) $y = e^{y/x} + 1$

b) $y = xe^{y/x} - 1$
c) No puede usarse cambio de variable
d) No se puede integrar por los métodos directos.

7.11 Resuelva la ecuación no lineal

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x-2} = 5(x-2)y^{1/2}$$

7.12 Suponga que en una comunidad cuenta con 15000 personas que son susceptibles de adquirir una enfermedad contagiosa, en el tiempo t = 0, el número de personas que han desarrollado la enfermedad es 5000 y este se incrementa a una tasa proporcional al producto del número de aquellas que han adquirido la enfermedad y de aquellas que no. (Considere que la tasa inicial de incremento es de 500 sujetos por día). ¿Cuánto tiempo pasara para que otras personas desarrollen la enfermedad?

7.13 Un tanque contiene originalmente 200 lit. de agua limpia. Entonces se vierte en el tanque agua que contiene 0.04 kg de sal por litro a una velocidad de 8 lit. por minuto y se deja que la mezcla salga bien homogenizada con la misma rapidez . ¿Cuál es la cantidad de sal en el recipiente luego de 10 min? Después de 10 min se detiene el proceso y se vierte agua limpia al tanque con la misma rapidez de entrada. ¿Cuál es la cantidad de sal a los 20 min de toda la operación?

7.14 El aire de un teatro de dimensiones 12x8x4 mt contiene 0.12% de su solución de CO_2 . Se desea renovar en 10 minutos el aire, de modo que llegue a contener solamente el 0.06% de CO_2 . Calcular el número de por minuto que deben renovarse, suponiendo que el aire exterior contiene 0.04% de CO_2 .

7.15 Un tanque semiesférico tiene un radio de 4 pies, en t = 0 está lleno de agua, en ese momento se hace un orificio circular con un diámetro de una pulgada en el fondo del tanque ¿Cuánto tiempo tomará a toda el agua salir?

7.16 Una taza de café se calienta en un microondas hasta una temperatura de 80°C, luego se la saca y se deja enfriar en un cuarto, que se encuentra a una temperatura de 25°C, si en los primeros 4 minutos se enfría hasta una temperatura de 65°C. Plantee la ODE que expresa que la razón de cambio de la temperatura 'T' de la taza de café respecto al tiempo 't' es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura de la taza de café en cualquier instante de tiempo y la temperatura a la que se encuentra el ambiente donde se enfría.

7.17 la cantidad de materia radiactiva que se desintegra por unidad de tiempo es proporcional a la cantidad de materia que queda. Según ciertas experiencias, la desintegración anual de radio es del orden de 0.44 mgs por gramo. Calcular cuántos años deben transcurrir para que se desintegre la mitad de toda la reserva del radio

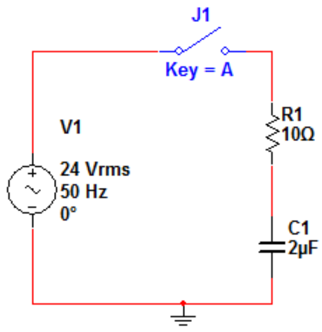
7.18 Un torpedo se desplaza a una velocidad de 60 km/h, en el momento en que se agota el combustible. Si el agua se opone a su movimiento con una fuerza proporcional a la velocidad y si en 1 km de recorrido reduce la velocidad a 30 km/h. Calcular la distancia a la que se detendrá.

8. TRABAJO INTEGRADOR – PROBLEMAS DE INGENIERÍA

8.1 Modelación y simulación del comportamiento de un circuito serie R-C o R-L

a) Elaborar un modelo matemático que describa el comportamiento de la carga y la corriente en un circuito serie "RC" o "RL" con interruptores y fuentes (corriente continua o corriente alterna) y con valores iniciales que describe la carga y/o corriente en el circuito.

b) Encuentre la solución de dicho problema con valores iniciales. Identifique el término correspondiente al estado transitorio (régimen transitorio) y al estado estable (estado estacionario)de la carga q(t) y al corriente i(t).
c) Grafique la solución con escalas adecuadas (tiempos no negativos) aplicando software matemático
d) Aplicar el programa MULTISIM para construir, simular el modelo físico de circuito eléctrico y obtener las señales de corriente y voltaje.
e) Comparar las gráficas obtenidas para validación del modelo aplicado. Usar la solución del modelo y la tabla de valores (para predecir algunos valores (Que sucede si t → muy grande).



8.2 Modelación y simulación de ley de enfriamiento o calentamiento de Newton

a) Elaborar un modelo matemático que describa el comportamiento de la variación de la temperatura en un elemento del automóvil con valores iniciales de temperatura.
b) Encuentre la solución de dicho problema con valores iniciales. Identifique el término correspondiente al estado transitorio (régimen transitorio) y al estado estable (estado estacionario).
c) Grafique la solución con escalas adecuadas (tiempos no negativos) aplicando software matemático
d) Aplicar el programa MODELLUS 4.01 para construir, simular el modelo físico de temperatura.
e) Tomar mediciones de temperatura del elemento mediante un pirómetro. Tabular en una hoja de Excel y elaborar una gráfica de los datos obtenidos.
f) Comparar las gráficas obtenidas para validación del modelo aplicado. Usar la solución del modelo y la tabla de valores (mediciones) para predecir la temperatura.

8.3 Agregar aplicaciones según la carrera por parte del Docente

9. OBSERVACIONES ESPECIALES

- Revise los conceptos vistos en clase y el material subido al AVAC.
- Desarrollar todas las actividades, los ejercicios propuestos en esta guía y los recomendados por el docente.
- Los talleres en clase pueden desarrollarse con grupos de 2 o 3 estudiantes
- Utilice software matemático para ayuda con las gráficas de algunos ejercicios.
- Ante cualquier duda, pregunte a su profesor y asista a las tutorías